

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA

Nota final
9,7 (nove e sete)
WJM

PROJETO OTIMIZADO DE UM TRANSDUTOR
PIEZELÉTRICO PARA CORTE DE TECIDOS

César Yukishigue Kiyono

São Paulo
2005

**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO ESCOLA POLITÉCNICA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECATRÔNICA**

**PROJETO OTIMIZADO DE UM TRANSDUTOR
PIEZELÉTRICO PARA CORTE DE TECIDOS**

Trabalho de formatura apresentado à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo para
obtenção do título de Graduação em Engenharia

César Yukishigue Kiyono

Orientador: Prof. Dr. Emílio Carlos Nelli Silva

**São Paulo
2005**

DEDALUS - Acervo - EPMN



31600011862

149459

FICHA CATALOGRÁFICA

Kiyono, César Yukishigue

Projeto otimizado de um transdutor piezelétrico para corte de tecidos / C.Y. Kiyono. -- São Paulo, 2005.

p.

Trabalho de Formatura - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos.

1.Atuadores piezelétricos 2.Otimização topológica 3.Método dos elementos finitos 4.Corte 5.Tecidos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia Mecatrônica e de Sistemas Mecânicos II.t.

RESUMO

Este trabalho tem por finalidade desenvolver um software para otimizar uma estrutura mecânica acoplada à um transdutor piezelétrico de potência utilizado em máquinas para corte ultrassônico de tecidos sintéticos cuja composição pode ser até 35% de fibra natural. A otimização dessa estrutura, chamada de sonotrodo, tem por objetivo melhorar e maximizar a distribuição dos deslocamentos de uma de suas extremidades, melhorando o corte do tecido. O tecido passa entre essa extremidade do sonotrodo e um cilindro de metal duro que contém a gravação em alto relevo do padrão a ser produzido. Através da vibração do transdutor piezelétrico de potência, que está acoplado ao sonotrodo por um amplificador mecânico, o tecido é cortado. O amplificador mecânico tem a função de aumentar a amplitude da vibração produzida pelo transdutor, mas o que garante o bom corte do tecido são as características vibracionais do sonotrodo em função da atuação do transdutor. Muitos estudos estão sendo realizados para esta máquina de corte de tecidos, sendo a maior dificuldade o desenvolvimento do sonotrodo. Este projeto visa aplicar técnicas de otimização no projeto desta estrutura, no lugar do desenvolvimento atual, baseado em técnicas de tentativa e erro. O software desenvolvido em linguagem C usa o Método de Elementos Finitos (MEF) para modelar o protótipo e o Método de Otimização Topológica (MOT) para gerar várias configurações otimizadas do transdutor, as quais serão avaliadas, ao final, pelo software comercial ANSYS.

ABSTRACT

This work presents the development of a software which optimizes a mechanical structure connected to a high power piezoelectric transducer used in ultrasonic cutting machines of synthetic fabrics. The optimization of this structure, called wide horn, aims to improve the displacements distribution in one of its side, to improve the cutting process. The fabric is moved between this side of the wide horn and a hard metal roll which contains the pattern to be printed. Due to the vibration of the piezoelectric transducer, which is connected to the wide horn by a mechanical amplifier, the fabric is cut. The mechanical amplifier is used to increase the amplitude of vibration produced by the transducer. This project applies optimization techniques to design this structure, replacing the current method of trial and error. The software developed in C language uses the Finite Element Method (FEM) to model the prototype and the Topology Optimization Method (TOM) to generate several optimized shapes of the transducer, which will be evaluated, in the end, by the commercial software ANSYS.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. Piezelectricidade	1
1.2. Transdutores piezelétricos	2
1.2.1. Aplicações de transdutores piezelétricos	3
1.3. Transdutores piezelétricos de potência.....	5
1.3.1. Aplicações do transdutor piezelétrico de potência.....	6
1.4. Máquina para corte de tecidos.....	9
2. MOTIVAÇÃO.....	11
3. OBJETIVOS.....	12
4. OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA.....	13
4.1. Introdução	13
4.2. Procedimento para implementação da Otimização Topológica	15
4.3. Conceitos teóricos da Otimização Topológica	17
4.3.1. Domínio Fixo Estendido	17
4.3.2. Modelo de Material.....	19
4.4. Método de densidades.....	20
5. PIEZELETRICIDADE E O MEF PIEZELÉTRICO	24
5.1. Piezelectricidade e Cerâmicas Piezelétricas	24
5.2. Equações constitutivas piezelétricas na forma tensorial e matricial.....	26
5.3. Método de Elementos Finitos	30
5.3.1. Formulação do elemento isoparamétrico de quatro nós	31
5.4. Equações de equilíbrio.....	33
6. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA PARA O PROJETO DO SONOTRODO	35
6.1. Formulação de OT do software acadêmico	36
6.2. Formulação de OT estendida para o caso dinâmico.....	38

6.3. Formulação de OT para deslocamentos uniformes	39
6.4. Análise de sensibilidades	41
6.4.1. Gradiente da formulação de OT do software acadêmico.....	41
6.4.2. Gradiente da formulação de OT do software acadêmico estendido para o caso dinâmico	42
6.4.3. Gradiente da formulação de OT para deslocamentos uniformes.....	43
7. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA	48
7.1. Programação linear seqüencial.....	48
8. RESULTADOS E CONCLUSÕES	55
8.1. Sonotrodo atual	55
8.2. O Software.....	56
8.3. Resultados da formulação estática de OT (software acadêmico inicial)..	58
8.4. Resultados da formulação dinâmica de OT (software acadêmico estendido)	60
8.5. Resultados do software com a nova formulação proposta de OT	64
8.6. Conclusões finais	68
ANEXOS	69
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	70

LISTA DE FIGURAS

Fig. 1.1. Efeito Piezelétrico.....	1
Fig. 1.2. Efeito piezelétrico inverso.....	2
Fig. 1.3. Pilha de cerâmicas piezelétricas.....	3
Fig. 1.4. Esquema do gerador de gotas por ultra-som.....	4
Fig. 1.5. Foto do dispositivo e estrutura de montagem do sensor de tato.....	5
Fig. 1.6. Transdutor piezelétrico tipo sanduíche visto em corte.....	6
Fig. 1.7. Esquema de montagem do transdutor usado em sonar para uso naval.....	7
Fig. 1.8. Montagem do transdutor no projeto de ultra-som de alta potência.....	7
Fig. 1.9. Esquema da furadeira ultrassônica usando transdutor piezelétrico.....	8
Fig. 1.10. Representação esquemática do processo de corte de tecidos sintéticos por ultra-som. a) Cilindro com o padrão em alto-relevo; b) tecido; c) sonotrodo;	10
Fig. 4.1. Problema exemplo.....	14
Fig. 4.2. Abordagens para solução do problema.....	15
Fig. 4.3. Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.....	17
Fig. 4.4. Representação de um domínio desconhecido (a) e do domínio estendido fixo(b).....	18
Fig. 4.5. Definição do domínio de projeto.....	19
Fig. 4.6. Curvas de interpolação da razão entre a massa e o módulo de elasticidade para o SIMP e RAMP.....	22
Fig. 5.1. Estrutura do PZT antes (a) e depois (b) do processo de polarização.....	24
Fig. 5.2. Dipolos elétricos no domínio de Weiss: (a) despolarizado; (b) durante polarização; (c) após polarização.....	25
Fig. 5.3. Sistema de coordenadas.....	27
Fig. 5.4. Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal.....	27
Fig. 5.5. Apresentação esquemática do MEF.....	30
Fig. 5.6. Mapa de coordenadas isoparamétricas. (a) elemento em coordenadas locais; (b) elemento em coordenadas globais.....	31
Fig. 6.1. Definição do problema de OT, do domínio de projeto e condições de contorno do problema.....	35
Fig. 6.2. Ilustração dos deslocamentos $u_{1r} - \beta$	40

Fig. 7.1. Limites móveis	51
Fig. 8.1. Sonotrodo utilizado atualmente nas máquinas de corte de tecidos.	55
Fig. 8.2. Gráfico do perfil de deslocamentos do sonotrodo mediante excitação elétrica.....	56
Fig. 8.3. Domínio inicial com as dimensões e condições de contorno.	57
Fig. 8.4. Implementação numérica do software.....	58
Fig. 8.5. Resultados da formulação estática do MOT.....	59
Fig. 8.6. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.....	59
Fig. 8.7. Resultados da Formulação de MOT dinâmico.	60
Fig. 8.8. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.....	61
Fig. 8.9. Domínio inicial com as condições de contorno com restrição de domínio. 62	62
Fig. 8.10. Resultado da Formulação do MOT dinâmico, com restrição de domínio. 63	63
Fig. 8.11. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.....	63
Fig. 8.12. Resultados com a nova formulação de OT.....	64
Fig. 8.13. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.....	65
Fig. 8.14. Esquema do conjunto amplificador-sonotrodo.....	66
Fig. 8.15. (a) Esquema do conjunto sonotrodo-amplificador-transdutor, carregamentos e restrições; (b) deformação da estrutura.....	67
Fig. 8.16. Análise quantitativa. Gráfico detalhado dos deslocamentos do resultado do conjunto sonotrodo-amplificador-transdutor.	67

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PZT	Titanato-Zirconato de Chumbo
Eq.	Equação
Fig.	Figura
MEF	Método de Elementos Finitos
MOT	Método de Otimização Topológica
OT	Otimização Topológica
SIMP	“Simple Isotropic Material with Penalization”
RAMP	“Rational Approximation of Material Properties”
PLS	Programação Linear Simples
ANSYS	Software comercial de Elementos Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Domínio de projeto
q	Função contínua definida no domínio
A_n	Variável de projeto
$E(x)$	Propriedade elástica de um material
E_0	Propriedade elástica básica de um material
$\rho(x)$	Densidade de um material
ρ_0	Densidade do material base
$\chi(x)$	Função discreta
Ω_s	Região onde há presença de material
$C(x)$	$E(x)$ ou $\rho(x)$
C_0	E_0 ou ρ_0
γ	Variável de projeto pseudo-densidade
p	Fator de penalização
T	Tensão mecânica
S	Deformação mecânica
u	Vetor de deslocamentos
D	Deslocamento elétrico
E	Campo elétrico
c^E	Tensor de rigidez para E constante
e	Tensor de coeficientes piezelétricos
ϵ	Permissividade elétrica
ϵ^S	Tensor de permissividade elétrica para S constante
ϕ	Potencial elétrico
[B]	Relação entre S e u
ξ, η	Coordenadas locais
[N_u]	Função de forma de deslocamento mecânico
[N_φ]	Função de forma de deslocamento elétrico
{u_e}	Vetor de deslocamento nodal
{φ_e}	Vetor potencial elétrico nodal
M	Matriz de massa

K_{uu}	Matriz de rigidez mecânica
$K_{u\varphi}$	Matriz de rigidez piezelétrica
$K_{\varphi\varphi}$	Matriz de rigidez dielétrica
U	Vetor de deslocamento mecânico
Φ	Vetor potencial elétrico
F	Vetor de força mecânica
Q	Vetor de carga elétrica
A	Amplitude de oscilação
ω	Freqüência de operação
L_2	Transdução média
L_3	Flexibilidade média
w	Coeficiente de atribuição de peso na função objetivo
β	Variável auxiliar
k	Coeficiente de β
u_{1i}	deslocamentos submetidos à otimização
S	Quantidade total de deslocamentos u_{1i}
$\{\mathbf{A}\}, \{\mathbf{B}\}$	Matrizes auxiliares
C	Coeficiente auxiliar
λ	Vetor de deslocamentos gerado por um vetor de forças igual a $\{\mathbf{B}\}$
$f(\mathbf{x})$	Função linear
$F(\mathbf{x})$	Função não linear
F	Função objetivo do problema de otimização
x_i^{\min}	Limite móvel inferior da variável de projeto
x_i^{\max}	Limite móvel superior da variável de projeto

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresenta-se, inicialmente, um breve histórico do efeito da piezeletricidade e uma breve introdução das principais funcionalidades e aplicações dos transdutores piezelétricos e dos transdutores piezelétricos de potência, diante um estudo feito em diversos artigos científicos para que se possa observar o amplo uso destes dispositivos. Ainda, tem-se uma apresentação do funcionamento e do uso do transdutor piezelétrico de potência na máquina em estudo neste trabalho.

1.1. Piezeletricidade

A descoberta do efeito piezelétrico se deu em 1880 em cristais de quartzo pelos irmãos Pierre e Jacques Curie, o que motivou inúmeros estudos para o desenvolvimento de sistemas transdutores mecânicos. Contudo, a primeira aplicação de um elemento piezelétrico pode ser atribuída a Langevin (1921), que desenvolveu um sonar utilizando o quartzo como elemento piezelétrico (EIRAS).

De um modo geral, define-se efeito piezelétrico como a conversão de energia mecânica em elétrica (efeito direto) ou a conversão de energia elétrica em mecânica (efeito inverso).

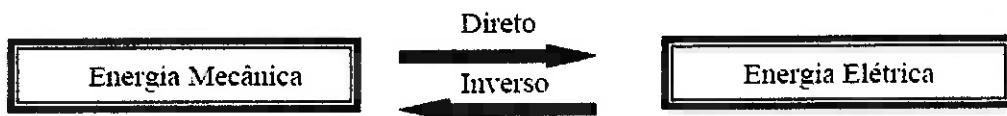


Fig. 1.1. Efeito Piezelétrico.

Ou seja, é um fenômeno físico pelo qual aparece uma diferença de potencial elétrico entre as faces de um cristal quando este se submete a uma pressão mecânica. O efeito inverso também se aplica, surgindo uma deformação mecânica ao ser aplicada uma diferença de potencial.

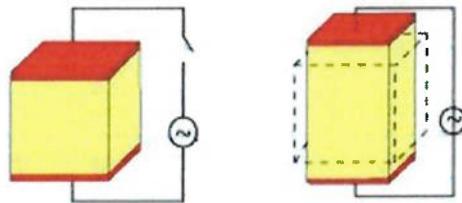


Fig. 1.2. Efeito piezelétrico inverso.

Em consequência de inúmeros estudos sobre elementos piezelétricos, descobriu-se que cerâmicas de Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) são mais vantajosas que os cristais piezelétricos (como quartzo), pois suas características físicas, químicas e piezelétricas podem ser ajustadas conforme a aplicação, ou seja, são mais versáteis. Além disso, podem ainda ser confeccionadas em uma infinidade de formatos, por causa do processo de fabricação por aglomeração de partículas. Outras vantagens do PZT sobre os cristais piezelétricos são sua alta temperatura de Curie e de suas fortes características piezelétricas (SILVA, 2005).

1.2. Transdutores piezelétricos

Transdutores piezelétricos são estruturas capazes de transformar energia elétrica em deformação mecânica ou vice-e-versa. Este efeito é possível pois esses tipos de transdutores são construídos utilizando uma cerâmica ou uma pilha de cerâmicas piezelétricas como atuadores (Fig. 1.3). Uma vantagem desta montagem é a possibilidade de se trabalhar em altas freqüências, na ordem de 1 MHz. Porém, se aplicada tensões elétricas maiores que 1000 volts, a cerâmica pode fraturar.

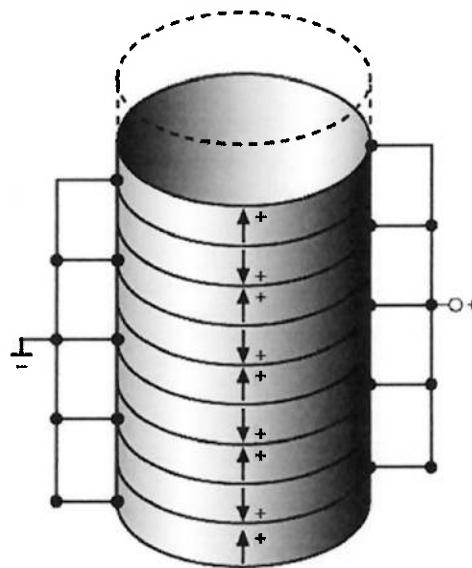


Fig. 1.3. Pilha de cerâmicas piezelétricas.

1.2.1. Aplicações de transdutores piezelétricos

Uma aplicação interessante para o transdutor piezelétrico é o projeto de micromáquinas para geração de gotas (MEACHAM et al., 2004). O transdutor piezelétrico funciona como gerador de ultra-som, e junto com um reservatório com o fluido a ser ejetado e uma estrutura de silicone tipo corneta como bocal, surge o projeto do gerador de gotas, representado na Fig. 1.4.

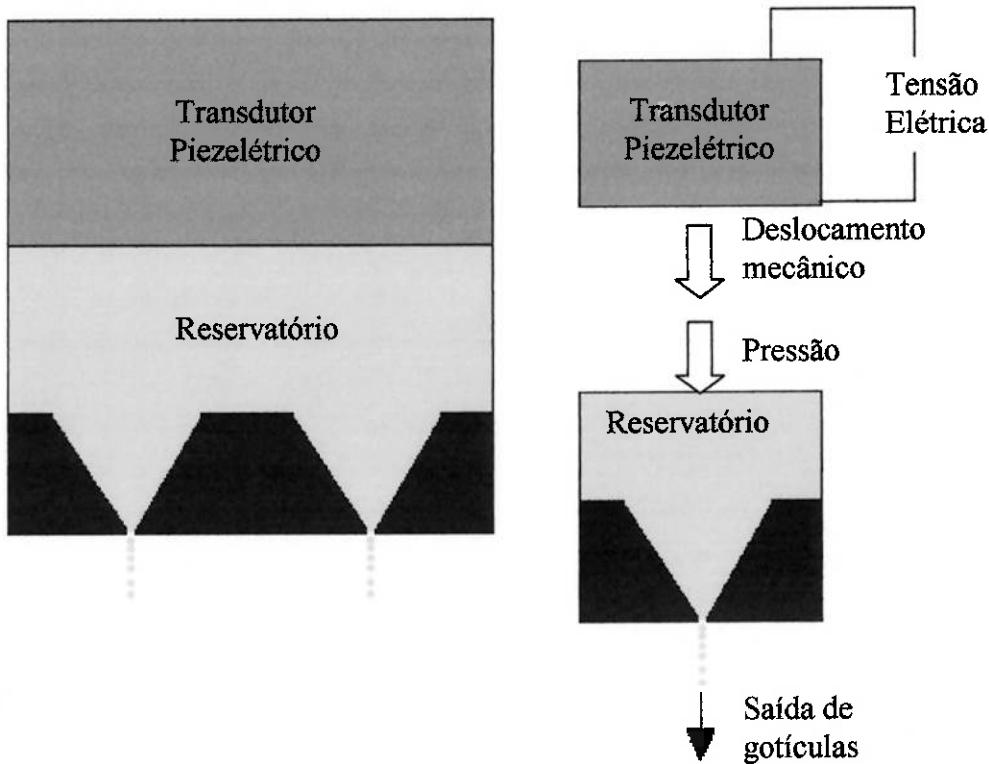


Fig. 1.4. Esquema do gerador de gotas por ultra-som.

Um pico de tensão elétrica é fornecido ao transdutor que, devido ao efeito piezelétrico, gera um deslocamento mecânico, aplicando uma abrupta pressão sobre o reservatório, fazendo com que saia uma gotícula pelo orifício inferior.

O gerador de gotas pode ser usado em cabeçotes para impressão a jato de tinta. Contudo, o alvo para essa micromáquina é a área de Medicina, pois os métodos tradicionais usados em impressoras a jato de tinta, como o método térmico, degradam as substâncias usadas para serem ejetadas e possuem uma vida muito curta devido a possível queima de resistores.

Uma outra aplicação de transdutores piezelétricos é no projeto de sensores robóticos de tato em tempo real para determinação de propriedades físicas de biomateriais (OMATA, 2004).

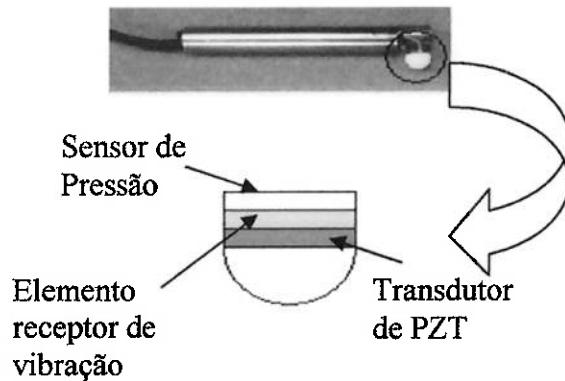


Fig. 1.5. Foto do dispositivo e estrutura de montagem do sensor de tato.

O sensor de tato usa como componentes, um disco de PZT que atua como gerador de ondas de ultra-som. Ele é acoplado a um outro disco de PZT atuando como detector de vibração. Para detectar a pressão de contato, é usado um sensor de pressão.

Nesta subseção foram apresentados apenas alguns exemplos para que possa ser observado que o estudo sobre transdutores piezelétricos é muito abrangente e mesmo já existindo muitos projetos já realizados, está claro que ainda existem muitas idéias a serem desenvolvidas.

Enfim, existem diversas aplicações para transdutores piezelétricos, não só na área da Engenharia quanto na área da Medicina, que atualmente andam juntas pesquisando e desenvolvendo projetos muito importantes na área.

1.3. Transdutores piezelétricos de potência

A grande diferença de um transdutor piezelétrico para um transdutor piezelétrico de potência é a sua montagem. O último transdutor citado, o de potência, é construído, em geral, na forma de sanduíche, ou seja, as cerâmicas piezelétricas são comprimidas entre duas massas metálicas por um parafuso de alta resistência mecânica. As cerâmicas são polarizadas na direção longitudinal, com sentidos de polarização alternados a cada cerâmica para possibilitar a ligação em paralelo. Entre as cerâmicas e entre as massas metálicas há eletrodos ligados em paralelo, que são utilizados para a aplicação de tensão elétrica (SILVA, 2005).

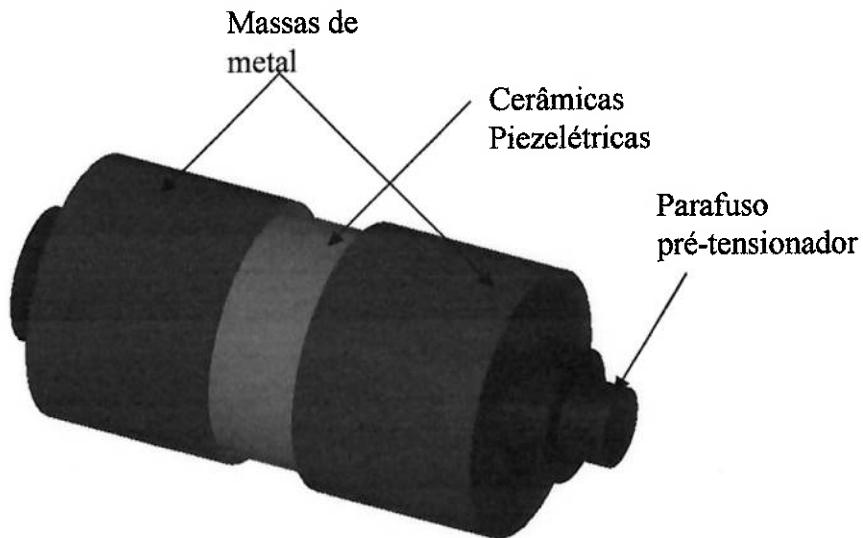


Fig. 1.6. Transdutor piezelétrico tipo sanduíche visto em corte.

As duas massas de metal têm a função de diminuir a freqüência de ressonância do transdutor bem abaixo do que se fosse apenas uma pilha de piezo cerâmica (DESILETS et al., 1999). O pré-tensionamento das cerâmicas piezelétricas evita a fratura destas devido a altas tensões aplicada às cerâmicas (ARNOLD, 2001a). O valor típico para essa pré-tensão é de 30 MPa (ARNOLD, 2001b).

Geralmente, existem três modos para acoplar as cerâmicas e as massas de metal (SHUYU, 1997). Quando o transdutor opera em baixa potência, os componentes podem ser ligados por cola de alta intensidade, como a resina epoxy. Quando operado em alta potência, os componentes devem ser conectados por um parafuso central. Neste caso, as superfícies de contato devem ser planas e lisas e o parafuso deve estar perpendicular às superfícies de contato. O terceiro caso é a junção dos dois anteriores, usando cola e o parafuso. Este método melhora as características vibracionais do transdutor.

1.3.1. Aplicações do transdutor piezelétrico de potência

Os transdutores piezelétricos de potência são comumente encontrados em sonares para navegação (Fig. 1.7) a mais de 50 anos (DESILETS et al., 1999).

Este transdutor é composto por uma pilha de cerâmicas piezelétricas comprimida por um parafuso entre dois corpos maciços, um de aço (traseiro) e um de alumínio (dianteiro), e uma camada de espuma ligada à massa dianteira.

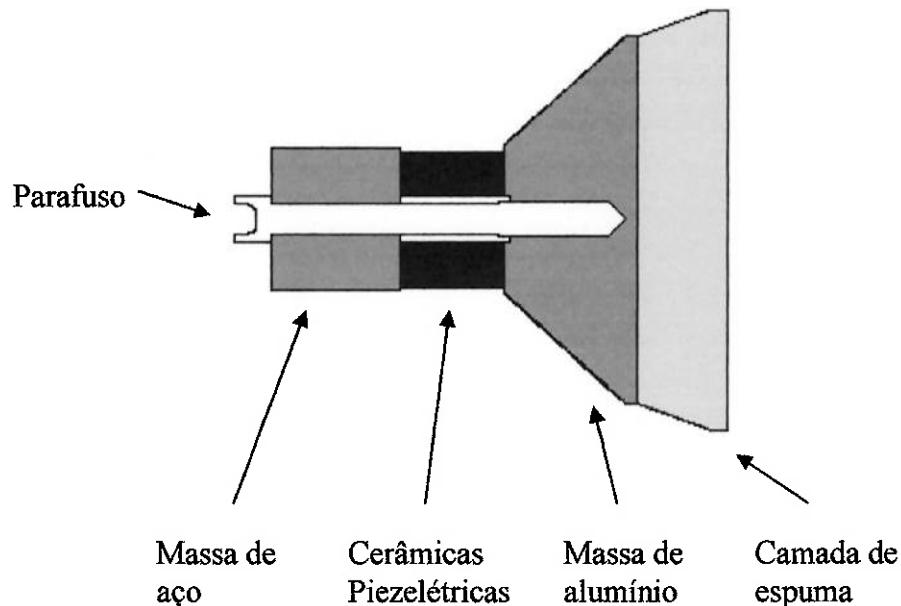


Fig. 1.7. Esquema de montagem do transdutor usado em sonar para uso naval.

Ainda pode ser comumente encontrado no projeto de ultra-som de alta potência, transmissão acústica de dados em baixa da água, limpeza e solda ultrassônica (SHUYU, 1995); (SHUYU, 2004); (SHUYU, 2005); (SHUYU, 1997).

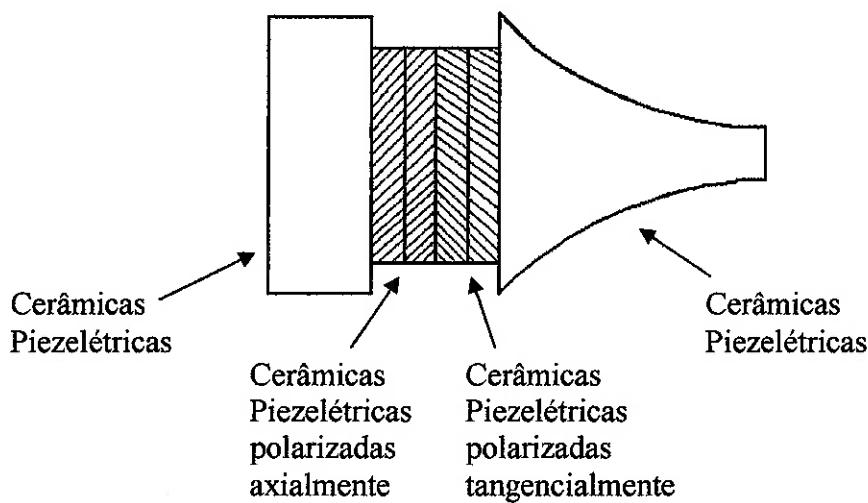


Fig. 1.8. Montagem do transdutor no projeto de ultra-som de alta potência.

Como pode ser visto na Fig. 1.8, esse tipo de transdutor é construído da mesma forma que o exemplo anterior, porém, uma diferença notável é no formato da parte de metal dianteira atuando como amplificador de amplitude de vibração. Outra diferença é a polarização das cerâmicas piezelétricas, onde um grupo de cerâmicas é polarizado axialmente e outro grupo polarizado tangencialmente.

Pode-se também encontrar estes transdutores no projeto de furadeiras ultrassônicas (SHERRIT et. al., 2000), recentemente pesquisado pela NASA para expedições para Marte ou outros planetas com baixa gravidade.

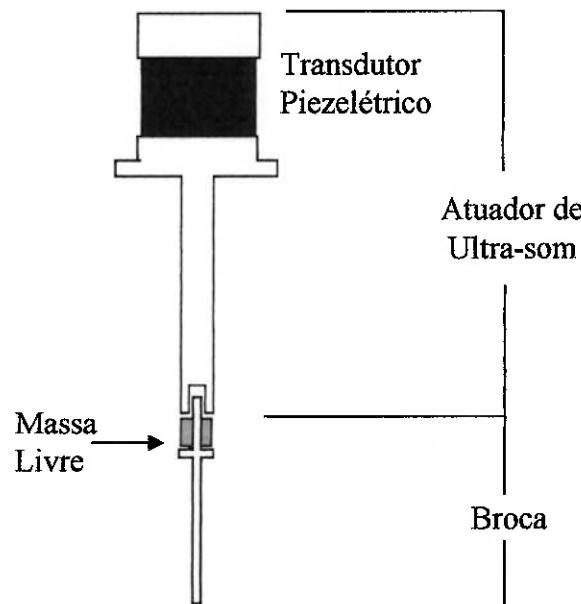


Fig. 1.9. Esquema da furadeira ultrassônica usando transdutor piezelétrico.

A vibração do atuador excita a massa livre, a qual ressoa entre o atuador e a broca em uma freqüência da ordem de 1000 Hz. A energia acústica na massa é transferida para o topo da broca e se propaga para a interface da rocha que é excitada além da tensão de ruptura e começa a quebrar. O dispositivo é capaz de perfurar várias rochas incluindo o granito, o diorito, o basalto e a pedra calcária.

Além destes exemplos, transdutores piezelétricos de potência podem ser usados em projetos como sonar para tomografia acústica e monitoramento do oceano global (MOROZOV, 2003), processos químicos (HEIKKOLA, 2004), etc.

Enfim, existe uma grande variedade de aplicações para ambos os tipos de transdutores mencionados, não apenas na área de Engenharia, mas também em outras áreas como a Medicina. Contudo, este trabalho visa estudar a aplicação do transdutor piezelétrico de potência em máquinas para corte de tecido, que será abordado na próxima subseção.

1.4. Máquina para corte de tecidos

Uma outra aplicação para o transdutor piezelétrico de potência é em cortes ultrassônicos de tecidos (LUCAS, 1996). Tecidos contendo sua composição mista com até 35% de fibra natural podem ser estampados por ultra-som (SILVA, 2005). O tecido (Fig. 1.10b) passa entre uma extremidade do sonotrodo (Fig. 1.10c) e um cilindro de metal duro (Fig. 1.10a) que contém a gravação em alto relevo do padrão a ser produzido. Através da vibração do transdutor piezelétrico de potência (Fig. 1.10e), que está acoplado ao sonotrodo por um amplificador mecânico (Fig. 1.10d), o tecido é cortado. O amplificador mecânico tem a função de aumentar a amplitude da vibração produzida pelo transdutor, mas o que garante o bom corte do tecido são as características vibracionais do sonotrodo em função da atuação do transdutor, que é o assunto principal deste trabalho. A Fig. 1.10 apresenta uma representação esquemática da máquina de costura.

De acordo com SILVA, 2005 e com alguns artigos estudados, a vibração do sonotrodo, nas geometrias da Fig. 1.10c, ocasiona resultados ruins no corte dos tecidos. O deslocamento do plano do sonotrodo em contato com o tecido, mediante a excitação do transdutor, não é uniforme, ou seja, as amplitudes dos pontos deste plano não são iguais e isto faz com que em algumas faixas o tecido seja cortado, e em outras ele seja somente estampado.

Nesta aplicação, o transdutor opera predominantemente em freqüências próximas a 20 kHz com potência de saída da ordem de 1 kW (SILVA, 2005).

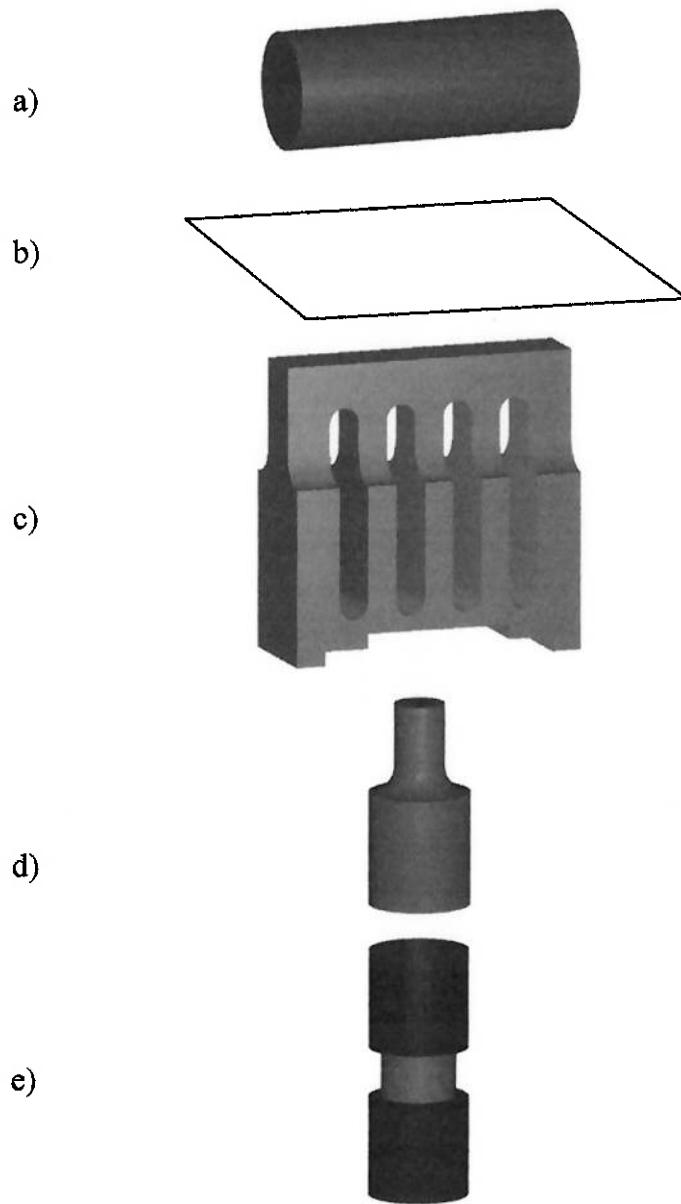


Fig. 1.10. Representação esquemática do processo de corte de tecidos sintéticos por ultra-som. a) Cilindro com o padrão em alto-relevo; b) tecido; c) sonotrodo; d) amplificador; e) transdutor piezelétrico de potência.

2. MOTIVAÇÃO

Transdutores piezelétricos de potência vêm sendo amplamente utilizados, não somente na área da Engenharia, mas também em outras áreas como, por exemplo, a de Medicina, para desenvolvimento de projetos como sensor de tato, ultra-som para transmissão acústica, etc.

O uso de transdutores piezelétricos de potência em máquinas de corte de tecidos tem gerado muitas pesquisas e estudos. Contudo, como já foi dito anteriormente, as configurações do sonotrodo atual não estão permitindo que o tecido seja perfeitamente cortado, provocado pela não uniformidade dos deslocamentos do plano do sonotrodo em contato com o tecido.

Já existem, atualmente, estudos visando este objetivo, porém o projeto do sonotrodo é atualmente baseado somente em técnicas de tentativa e erro, o que torna o processo ineficiente, pois esse método baseia-se em construir protótipos e testá-los. Isto faz com que o projeto necessite de muito tempo, existindo ainda a possibilidade de nunca se encontrar a topologia ótima.

3. OBJETIVOS

Neste trabalho será desenvolvido um software que otimize uma estrutura mecânica, chamada de sonotrodo, acoplada à um transdutor piezelétrico de potência utilizado em máquinas para corte de tecidos. Para isso, serão feitos estudos sobre transdutores piezelétricos e transdutores piezelétricos de potência, sobre o Método de Elementos Finitos (MEF) aplicado a materiais piezelétricos e também, um estudo mais aprofundado sobre o Método de Otimização Topológica (MOT). Em seguida será implementada uma rotina em linguagem C, utilizando o MEF e o MOT, para otimizar a estrutura e sua freqüência de ressonância. Utilizando o software, serão gerados diferentes projetos otimizados do atuador que ao final, serão avaliados usando o software comercial ANSYS.

O objetivo principal deste trabalho é aplicar técnicas de otimização topológica no desenvolvimento do sonotrodo, de modo a aumentar sua freqüência de ressonância e uniformizar sua distribuição de deslocamentos no plano em contato com o tecido, ou seja, fazer com que todos os pontos deste plano tenham o mesmo deslocamento vertical com máxima amplitude, melhorando assim, o corte do tecido.

O uso de técnicas de otimização topológica nos fornece, de uma maneira mais eficiente que os métodos de tentativa e erro, a topologia ótima do sonotrodo, atendendo a todos os requisitos desejados.

4. OTIMIZAÇÃO TOPOLOGICA

4.1. Introdução

Otimização topológica (OT) consiste num método computacional que permite, segundo um certo critério de custo, projetar a topologia ótima de uma estrutura. Basicamente, o Método de Otimização Topológica distribui o material no interior de um domínio fixo de forma a maximizar (ou minimizar) uma função custo especificada, por exemplo, máxima rigidez e mínimo volume de material. O material em cada ponto do domínio pode variar de ar (não há presença de material) até sólido (total presença de material), podendo também assumir densidades intermediárias entre ar e sólido, de acordo com um modelo de material definido.

Um algoritmo de otimização é usado para encontrar a distribuição ótima de material, o que, de forma iterativa, torna o processo rápido; caso contrário, seriam necessárias muitas análises para encontrar a distribuição ótima do material no domínio. Para acelerar o processo de busca da distribuição ótima de material, os métodos de otimização utilizam-se da informação dos gradientes (ou derivadas) da função custo em relação à quantidade de material em cada elemento. A distribuição de material é representada, por exemplo, associando um valor de densidade a cada elemento (subdomínio), obtido da discretização do domínio inicial.

Dessa forma, a OT combina essencialmente métodos de otimização com um método numérico de análise, por exemplo, o método de elementos finitos (MEF). Outros métodos numéricos de análise podem ser usados; no entanto, devem ser genéricos o suficiente de forma a lidar com estruturas de formas complexas resultantes da otimização.

O MOT é um assunto recente no campo da otimização estrutural. Contudo, os conceitos básicos que dão suporte teórico ao método foram estabelecidos a mais de um século (BENDSØE, 2003). Para entender melhor como surgiu o método e como ele se estabeleceu atualmente os projetos de estruturas mecânicas, devemos antes conhecer as diferentes formas de otimização estrutural existentes.

Considerando o problema clássico de projeto de uma estrutura com a mínima flexibilidade (máxima rigidez) com o menor volume de material como mostrado na Fig. 4.1, suponhamos que a princípio não conhecemos a forma ou a topologia da estrutura (o conceito de forma está relacionado com a geometria externa da estrutura enquanto o conceito de topologia engloba não somente a geometria externa, mas também a presença de furos internos na estrutura).

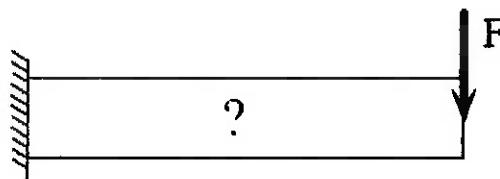


Fig. 4.1. Problema exemplo.

Temos essencialmente três abordagens em otimização estrutural para a solução desse problema, como descrito na Fig. 4.2.

A primeira delas é a Otimização Paramétrica (ou “size optimization” como é conhecida na literatura internacional), onde a forma da estrutura não se altera, apenas suas dimensões. Ou seja, assumindo-se uma forma pré-definida para a estrutura, por exemplo, uma viga em “I” (Fig.4.2(a)), algumas medidas que caracterizam a geometria dessa estrutura são escolhidas como variáveis de projeto, como as dimensões b , t e h mostradas na figura, e então, utilizando um software de otimização, determina-se o valor ótimo dessas variáveis que fornece a menor flexibilidade (maior rigidez) para a restrição de material imposta.

A segunda abordagem é a Otimização de Forma (ou “shape optimization”), que é uma abordagem mais genérica do que a Otimização Paramétrica em que a forma externa da estrutura é alterada. Ou seja, os contornos externos e internos da estrutura são parametrizados por curvas “splines” (Fig.4.2(b)) e os parâmetros dessas curvas constituem as variáveis de projeto. Através de um algoritmo computacional de otimização são determinados os parâmetros ótimos das curvas “splines” e, portanto, a forma ótima da estrutura que otimiza a função custo do projeto.

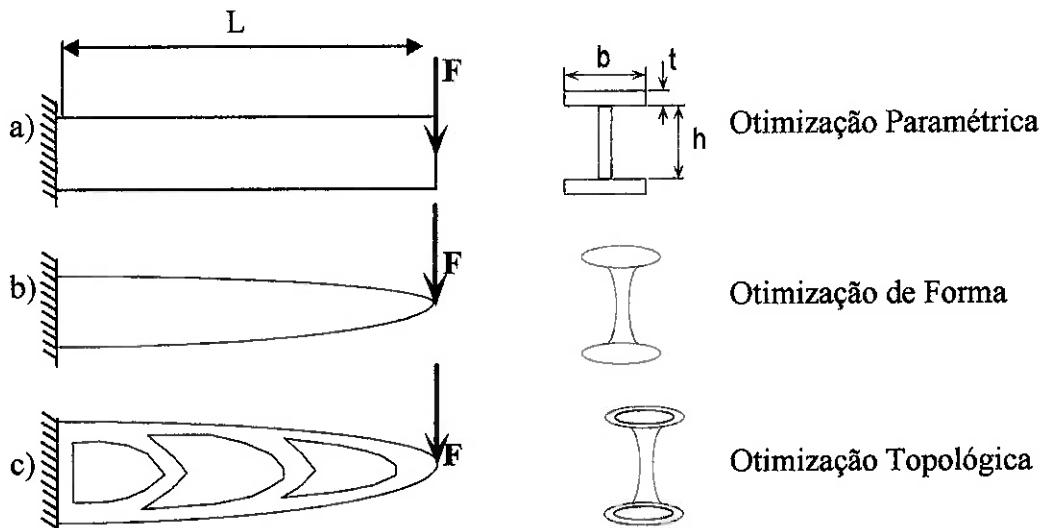


Fig. 4.2. Abordagens para solução do problema.

A última abordagem, chamada de Otimização Topológica, consiste em se obter a configuração ótima, buscando encontrar a distribuição ótima de material no interior da estrutura de tal forma a permitir a criação de “cavidades” (ou “furos”, Fig.4.2(c)) nas regiões onde não houver necessidade de material, observando que a estrutura resultante deve otimizar a função custo do projeto, considerando a restrição de material. As variáveis de projeto podem ser, por exemplo, medidas que indicam a distribuição de material em cada ponto do domínio.

A otimização topológica é a mais genérica, sendo que a quantidade de material removida (para a mesma função custo) é maior do que nos outros métodos de otimização, consequentemente, obtém-se a estrutura mais leve com melhor desempenho.

4.2. Procedimento para implementação da Otimização Topológica

O procedimento típico de projeto estrutural usando a otimização topológica é apresentado na Fig. 4.3. É importante observar que no processo de solução do problema de otimização o domínio de projeto é discretizado, e por isso torna-se necessária à utilização de métodos numéricos.

O primeiro passo consiste em definir o domínio (Ω) do projeto no qual a estrutura pode existir. Esse domínio é limitado pelos pontos de aplicação de carga e pelas condições de contorno da estrutura, ou seja, pontos onde os deslocamentos são restringidos. É importante nessa fase definir o domínio (Ω) com o maior tamanho possível, de forma a não limitar o domínio de trabalho da Otimização Topológica, pois como em qualquer método de otimização, quanto mais restrições são impostas, menor o espaço de soluções para o problema. No segundo passo o domínio (Ω) é discretizado em elementos finitos e são aplicadas as condições de contorno. Na terceira etapa, os dados do domínio (Ω) são fornecidos ao software de otimização topológica, que num processo iterativo, distribui o material no domínio (Ω) de forma a minimizar (ou maximizar) a função objetivo especificada. O resultado obtido é mostrado na Fig. 4.3.(c), onde a cor escura indica à presença de material e a cor branca a ausência de material no ponto do domínio (Ω). Note que podem surgir pontos com cores intermediárias, denominados de escalas de cinza (ou “gray scale”), que indicam presença de materiais intermediários, os quais são difíceis de serem implementados na prática, no entanto são inerentes ao problema de Otimização Topológica. Outro problema é a “instabilidade xadrez” onde elementos de cor escura e elementos de cor branca aparecem dispostos em forma de tabuleiro de xadrez. As características da “instabilidade xadrez” podem ser observadas mais adiante. Portanto, a “escala de cinza” e a “instabilidade xadrez” são indesejáveis e prejudicam na interpretação dos resultados da otimização (quarta etapa). Essa interpretação, que pode ser feita usando-se de métodos de processamento de imagem ou simplesmente desenhando-se uma estrutura baseada na imagem obtida pela OT, consiste na remoção das eventuais “escalas de cinza” e a suavização do contorno da topologia obtida, ajustando-a de forma a ser fabricada. O quinto passo consiste em se verificar o resultado final da estrutura. Em geral, os resultados gerados por OT não são intuitivos e é interessante fazer uma verificação da estrutura final usando o MEF, para criarmos confiança na solução através da comprovação da optimalidade do resultado. Finalmente, a última etapa é a fabricação da estrutura, onde, atualmente, existem várias técnicas de fabricação que permitem obter estruturas com formas complexas, como, a prototipagem rápida, a eletro-erosão a fio, processo de corrosão química pelo método de litografia, entre outras.

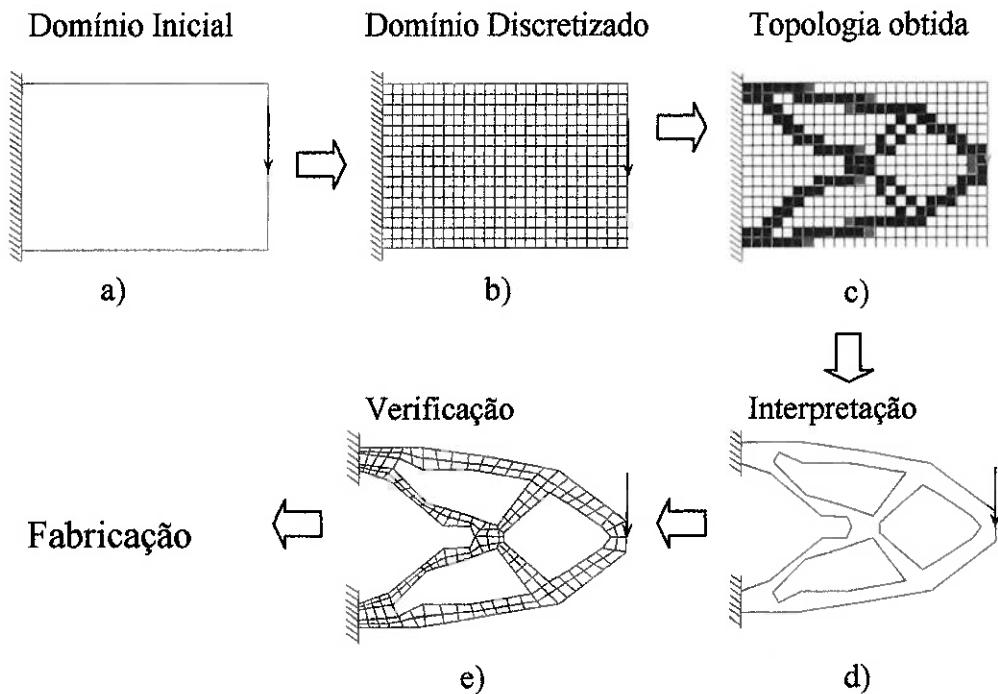


Fig. 4.3. Procedimento típico de projeto estrutural por otimização topológica.

4.3. Conceitos teóricos da Otimização Topológica

A OT baseia-se em dois conceitos teóricos principais, domínio fixo estendido e modelo de material, que serão apresentados a seguir.

4.3.1. Domínio Fixo Estendido

O domínio estendido fixo de projeto (Ω) é o espaço no qual o algoritmo de otimização topológica pode construir a estrutura.

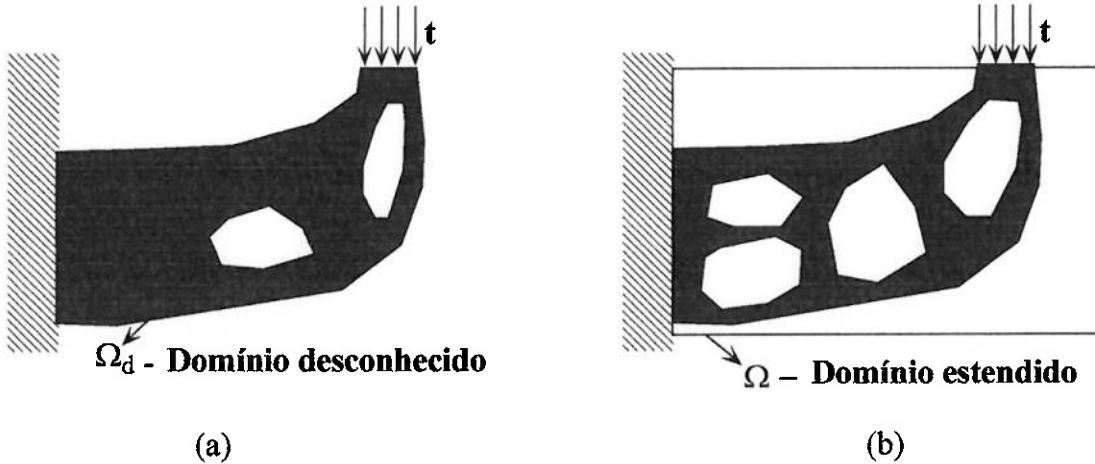


Fig. 4.4. Representação de um domínio desconhecido (a) e do domínio estendido fixo(b).

Como podemos ver na Fig.4.4(b), o domínio estendido fixo consiste num domínio de forma fixa limitado pelos pontos de apoio da estrutura e pontos de aplicação de carregamento, que conterá a estrutura desconhecida. Ou seja, num problema de OT, sem quaisquer informações sobre a geometria final da estrutura, a forma ótima é obtida sendo influenciada pelas restrições de deslocamentos (pontos de fixação), pela quantidade de material utilizada e pela aplicação de cargas. O objetivo da otimização topológica é determinar os espaços sem material ou “vazios” (variável de projeto) e a conectividade da estrutura através da remoção e adição de material nesse domínio. O problema de otimização consiste, portanto, em se encontrar a distribuição ótima de propriedades de materiais no domínio estendido fixo. A grande vantagem em relação a otimização de forma é que o modelo de elementos finitos do domínio não é alterado durante o processo de otimização, sendo alterado somente a distribuição de material nos elementos, pois sendo o domínio fixo, as derivadas de uma função q são facilmente calculadas usando a seguinte expressão:

$$\frac{\partial}{\partial A_n} \int_{\Omega} q d\Omega = \int_{\Omega} \frac{\partial q}{\partial A_n} d\Omega \quad (4.1)$$

onde A_n é uma variável de projeto, e q é uma função contínua definida no domínio.

4.3.2. Modelo de Material

O modelo de material é uma equação que define a mistura em micro-escala de dois ou mais materiais (um deles pode ser “vazio”) permitindo que hajam estágios intermediários ao se passar da condição de zero material (“buraco”) a sólido em cada ponto do domínio.

Para materiais isotrópicos, podemos escrever:

$$E(x) = \chi(x)E_0 \quad (4.2)$$

onde E_0 é a propriedade básica do material a ser distribuído e $\chi(x)$ é uma função discreta que caracteriza a estrutura a ser otimizada, e é definida em cada ponto (x) do domínio (Ω) da seguinte maneira:

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \Omega_D \\ 0 & \text{se } x \in \Omega \setminus \Omega_D \end{cases} \quad (4.3)$$

sendo Ω_D a região onde há presença de material, inserida num domínio Ω , representado na Fig. 4.5.

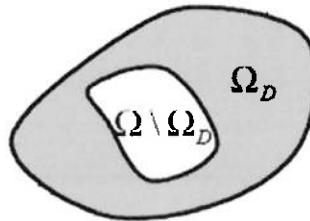


Fig. 4.5. Definição do domínio de projeto.

Todavia, por causa da parametrização discreta decorrente da função discreta $\chi(x)$, observam-se algumas desvantagens. Uma delas é a necessidade de discretizar o domínio em milhares de elementos para se obter uma solução mais realista, pois as variáveis de projeto são variáveis binárias que indicam presença ou ausência de material, ou seja, variáveis inteiras. Os métodos padrões de otimização em variáveis

discretas apresentam desvantagens na solução de problemas de tais dimensões. Uma outra desvantagem é a dependência da discretização da malha de MEF, ou seja, quanto mais a discretização do domínio é refinada, a solução tende a conter regiões com alternância entre vazio e sólido (0 ou 1). Este problema pode ser solucionado relaxando-se as variáveis de projeto.

Relaxar as variáveis de projeto significa permitir que elas assumam valores intermediários entre 0 e 1, e uma maneira de se fazer isso é definir um modelo de material substituindo a função discreta por uma contínua. A princípio, os estágios intermediários de materiais não têm um significado físico, sendo apenas decorrentes de um recurso matemático para relaxação do problema. Existem vários modelos de material que podem ser utilizados, entre eles o método das densidades apresentado no item a seguir.

4.4. Método de densidades

O método de densidades consiste em uma equação matemática que define o valor da densidade em cada ponto do domínio (Ω) em função da propriedade efetiva do material base usado no projeto, essencialmente simulando uma microestrutura.

Comumente usa-se a formulação SIMP (Simple Isotropic Material with Penalization), (BENDSØE, 1999), (BENDSØE, 2003), cuja equação é dada por:

$$C(x) = \gamma(x)C_0 \quad (4.4)$$

onde $\gamma(x)$ é interpretada como uma função de distribuição contínua da variável de projeto (pseudo-densidade), $0 \leq \gamma(x) \leq 1$ e $x \in \Omega$. $C(x)$ é o valor da propriedade do material em cada ponto do domínio, C_0 é isotrópico e depende do módulo de elasticidade (E_0) ou da densidade (ρ_0) do material base e da razão de Poisson (ν_0). Portanto, podemos dizer que a pseudo-densidade, em cada ponto do domínio (Ω) pode variar de “zero” (não há presença de material) à “um” (total presença de material), ou seja, teremos valores intermediários de materiais. Entretanto, apesar de ter estabelecido a relaxação do problema e permitir obter um espaço de solução

fechado, acabamos voltando no problema já mencionado anteriormente, a “escala de cinza”, que do ponto de vista prático, é difícil de ser interpretado.

Para evitar o excesso de ocorrências de pseudo-densidades intermediárias, penalizam-se os valores intermediários de $\rho(x)$ da seguinte maneira:

$$C(x) = \gamma(x)^p C_0 \quad (4.5)$$

onde p é o fator de penalização que reduz as pseudo-densidades intermediárias no resultado final, resultando em valores puros de 0 e 1 na distribuição das variáveis de projeto na solução ótima. No SIMP o módulo de elasticidade do material em cada ponto do domínio (Ω) varia com a variável de projeto γ , enquanto que ν_0 não depende de γ .

Contudo, estudos revelam que, quando considerada uma situação dinâmica de estruturas, modelo SIMP, acarreta em algumas complicações por causa da razão massa-elasticidade (HANSEN, 2005).

$$\frac{\gamma \rho_0}{\gamma^p E_0} = \frac{1}{\gamma^{p-1}} \frac{\rho_0}{E_0} \quad (4.6)$$

Isso faz surgir modos localizados em áreas de valores baixos de γ , ou seja, como pode ser observado na curva do modelo SIMP da Fig. 4.6, para valores baixos de γ a razão entre a massa e o módulo de elasticidade tende a um valor muito grande, sendo que deveria estar perto de zero. Por consequência disto, há o aparecimento das “escalas de cinza” em grande escala. Para resolver esse problema, uma outra formulação se mostra mais eficaz (HANSEN, 2005), (BENDSØE, 2003). Essa formulação é chamada de RAMP (“Rational Approximation of Material Properties”). A formulação de RAMP é dada pela seguinte equação:

$$C(x) = C_{\min} + \frac{\gamma(x)}{1 + p[1 - \gamma(x)]} (C_0 - C_{\min}) \quad (4.7)$$

onde p é o fator de penalização, $\gamma(x)$ é a variável de projeto, $C(x)$ pode ser a densidade ou o módulo de elasticidade do material em cada ponto do domínio, C_0 é o valor dessas propriedades para o material base e C_{\min} é o valor mínimo para tal propriedade. Geralmente usa-se (BENDSØE, 2003):

$$C_{\min} = 10^{-6} C_0 \quad (4.8)$$

Agora, com essa nova formulação, os problemas em áreas de baixa densidade são evitados, como pode ser visto na curva do modelo RAMP na Fig. 4.6.

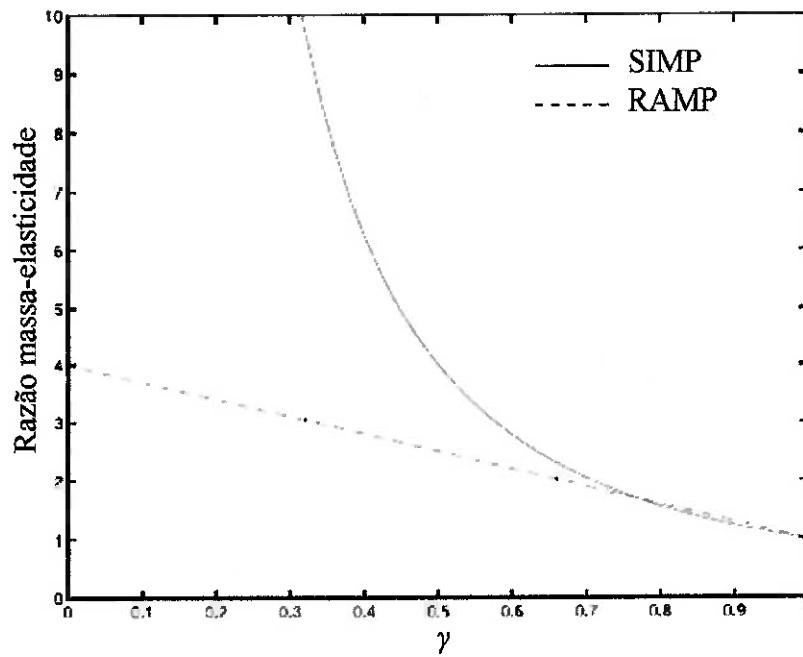


Fig. 4.6. Curvas de interpolação da razão entre a massa e o módulo de elasticidade para o SIMP e RAMP.

Portanto, o método de densidades é um modelo de material que, comparado a outros métodos, é menos complexo de ser implementado numericamente num algoritmo de otimização, pois possui apenas uma variável (γ) ao contrário de outros modelos de material. Além disso, o método das densidades também permite obter topologias bem definidas, isentas ou com uma quantidade mínima de “escalas de cinza”. Contudo, essas topologias obtidas são soluções ótimas locais e por isso

devemos ter uma relação de compromisso, ou seja, obter uma solução ótima local bem definida, o mais próxima possível da solução ótima global e que atenda os requisitos de viabilidade de construção para a estrutura projetada.

5. PIEZELETRICIDADE E O MEF PIEZELÉTRICO

5.1. Piezeletricidade e Cerâmicas Piezelétricas

A piezeletricidade é uma propriedade que certos materiais apresentam relacionando variáveis mecânicas, como tensão mecânica e deformação, e variáveis elétricas, como campo elétrico e deslocamento elétrico. Podemos também, definir a piezeletricidade como a polarização elétrica produzida por uma deformação mecânica em certos cristais (CARBONARI, 2003), ou seja, quando o material piezelétrico é submetido a uma deformação mecânica, um campo elétrico é gerado. O efeito inverso também se aplica, sendo gerada uma deformação mecânica no material piezelétrico quando submetido a um campo elétrico.

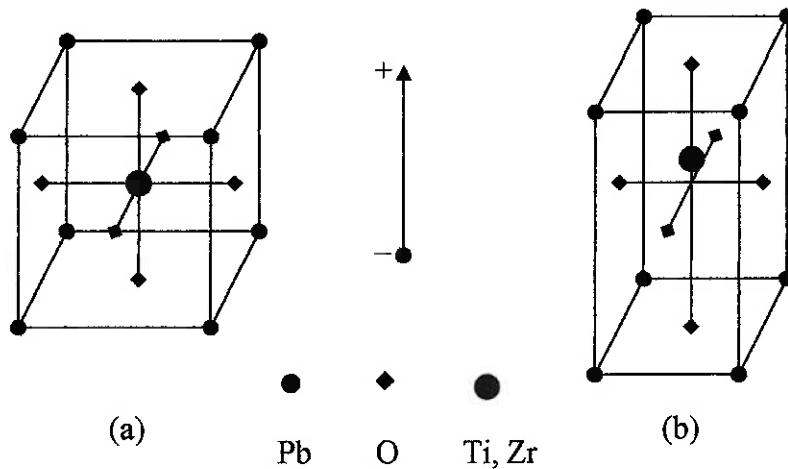


Fig. 5.1. Estrutura do PZT antes (a) e depois (b) do processo de polarização.

O efeito piezelétrico ocorre naturalmente em certos cristais, como o quartzo, no entanto, de maneira muito fraca (VINHAIS, 2003). Por este motivo, desenvolveu-se novos materiais piezelétricos, como o PZT (Titanato Zirconato de Chumbo), no qual o efeito piezelétrico é induzido artificialmente através de um processo de polarização.

No PZT existem dipolos elétricos em seu interior (chamados de domínio de Weiss), orientados aleatoriamente antes da polarização (Fig. 5.2(a)). Neste estado o

material não é piezelétrico. A polarização consiste no aquecimento da cerâmica até a temperatura Curie (SILVA, 2005), que é uma temperatura limite acima da qual as propriedades piezelétricas são perdidas.

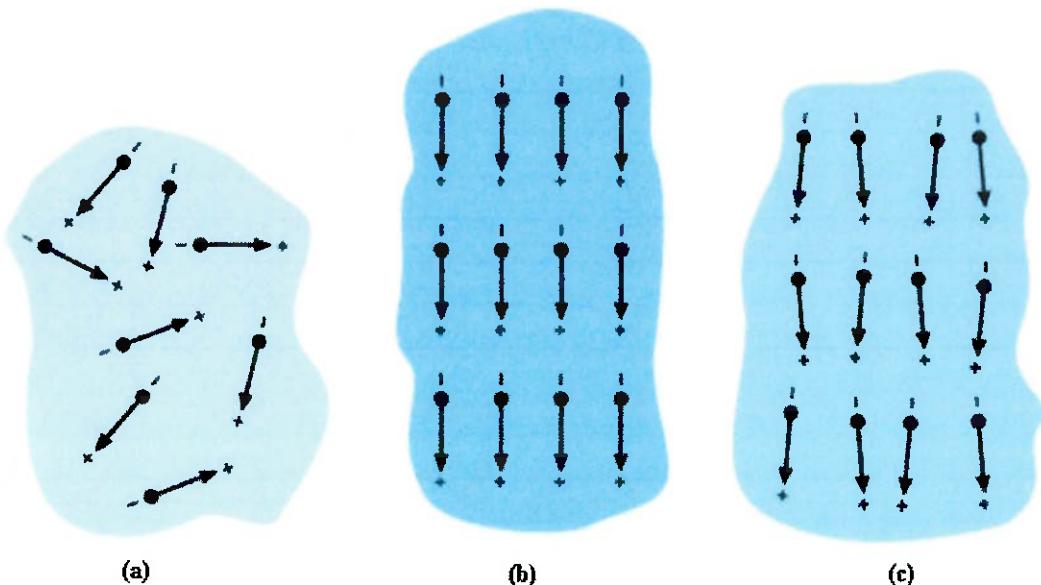


Fig. 5.2. Dipolos elétricos no domínio de Weiss: (a) despolarizado; (b) durante polarização; (c) após polarização.

Em seguida, um intenso campo elétrico (>2000 V/mm) é aplicado, o que faz com que os dipolos se alinhem (Fig. 5.2(b)), determinando a orientação das propriedades piezelétricas. Com a aplicação do campo, o material se expande na direção axial ao campo e contrai na direção perpendicular a ele. Mantendo o campo e resfriando o material lentamente, obtém-se finalmente um material piezelétrico, cujos dipolos se mantêm alinhados mesmo após retirar o campo elétrico (Fig. 5.2(c)). Por causa desta característica, o PZT é um material ferroelétrico, em analogia aos materiais ferromagnéticos.

Ao contrário dos cristais piezelétricos como o quartzo, as cerâmicas piezelétricas, como o PZT, possuem uma versatilidade maior, ou seja, suas características físicas, químicas e piezelétricas podem ser ajustadas conforme a aplicação, podendo também, ser confeccionadas em uma infinidade de formatos, por causa do processo de fabricação por aglomeração de partículas (SILVA, 2005).

5.2. Equações constitutivas piezelétricas na forma tensorial e matricial

As equações constitutivas piezelétricas relacionam variáveis elétricas e mecânicas. As variáveis mecânicas são geralmente a deformação \mathbf{S} e a tensão mecânica \mathbf{T} e as variáveis elétricas são o deslocamento elétrico \mathbf{D} e o campo elétrico \mathbf{E} , e são definidas como:

$$\mathbf{T} = \begin{Bmatrix} T_{xx} \\ T_{yy} \\ T_{zz} \\ T_{yz} \\ T_{xz} \\ T_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{S} = \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{zz} \\ S_{yz} \\ S_{xz} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

onde

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5.2)$$

e u_i ($i=x, y, z$) forma o vetor de deslocamentos dado por

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (5.3)$$

$$\mathbf{D} = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} \quad (5.4)$$

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

onde os índices 1, 2 e 3 indicam as coordenadas x , y e z , respectivamente.

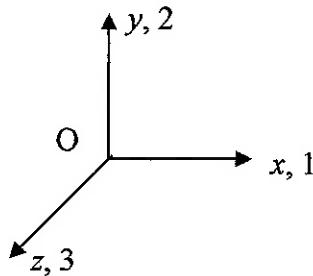


Fig. 5.3. Sistema de coordenadas.

A matriz de deformações S (Eq. 5.1) relaciona-se com os alongamentos ε , (com $\varepsilon_i = S_{ij}$, para $i=1,2,3$) e com as distorções γ_{ij} (com $\gamma_{ij} = 2S_{ij}$, para $i=1,2,3$ e $i \neq j$).

A matriz de tensões T é formada pelas tensões de acordo com a Fig. 5.4. Somente as tensões nas direções 11, 12 e 13 estão indicadas. As tensões nas demais direções são obtidas por analogia.

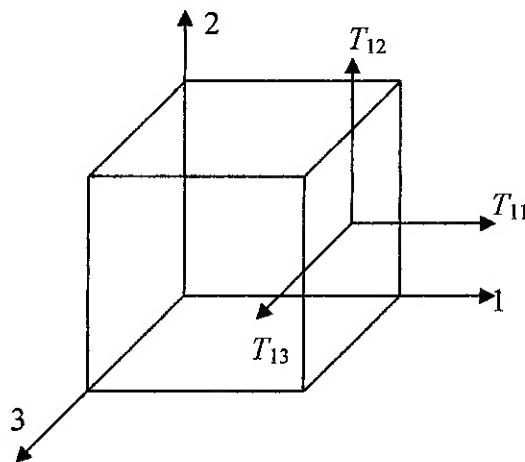


Fig. 5.4. Orientação das tensões em um elemento de volume infinitesimal.

As equações constitutivas que definem o comportamento de um material piezelétrico linear são dadas por (IKEDA, 1996); (LERCH, 1990):

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{c}^E \mathbf{S} - \mathbf{e}^t \mathbf{E} \\ \mathbf{D} &= \mathbf{e} \mathbf{S} + \mathbf{\varepsilon}^s \mathbf{E} \end{aligned} \quad (5.6)$$

onde \mathbf{c}^E , \mathbf{e} e $\mathbf{\varepsilon}^s$ são as matrizes de constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas, respectivamente. O sobrescrito E significa a campo elétrico constante, o sobrescrito s

significa a deformação mecânica constante e o sobrescrito ' significa a transposta da matriz.

O campo elétrico \mathbf{E} é relacionado com o potencial elétrico φ pela expressão:

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi \quad (5.7)$$

e a deformação mecânica \mathbf{S} ao deslocamento \mathbf{u} por:

$$\mathbf{S} = \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (5.8)$$

onde em coordenadas cartesianas:

$$B = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Assume-se de uma forma geral, a direção 3 como direção de polarização, independente desta ser a direção y ou z .

Os materiais piezelétricos são elasticamente e piezelectricamente anisotrópicos na direção 3 e isotrópicos no plano 12. Para os materiais das classes hexagonais com anisotropia na direção z são mostrados a seguir o tensor elástico (c^E), o tensor dielétrico (ε^S) e o tensor piezelétrico (e) na forma matricial (NADER, 2002); (CARBONARI, 2003).

As constantes de rigidez elástica (c^E) são:

$$[\mathbf{c}] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

As componentes do tensor dielétrico (ϵ^s) são:

$$[\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

E as constantes piezelétricas de tensão mecânica (e) são:

$$[\mathbf{e}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Das equações anteriores, monta-se o seguinte tensor, que representa um material piezelétrico com comportamento eletromecânico semelhante ao da cerâmica PZT-8:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \\ T_6 \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11}^E & c_{12}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{12}^E & c_{22}^E & c_{13}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{31} \\ c_{13}^E & c_{13}^E & c_{33}^E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44}^E & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66}^E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & -\epsilon_{11}^s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{11}^s & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\epsilon_{33}^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ -E_1 \\ -E_2 \\ -E_3 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

Os valores das constantes elásticas, piezelétricas e dielétricas são obtidos de trabalhos, livros e artigos (NADER, 2002).

5.3. Método de Elementos Finitos

O MEF a ser implementado no software é constituído de duas formulações de elementos isoparamétricos quadriláteros diferentes. Um elemento não-piezelétrico que possui dois graus de liberdade por nó (deslocamentos mecânicos no plano) discretizando o domínio otimizável, e um elemento piezelétrico, possuindo três graus de liberdade, dois que são os deslocamentos no plano e o terceiro que é o deslocamento elétrico, e que não é considerado na otimização.

A formulação do MEF é esquematizada como na figura abaixo (Fig. 5.5).

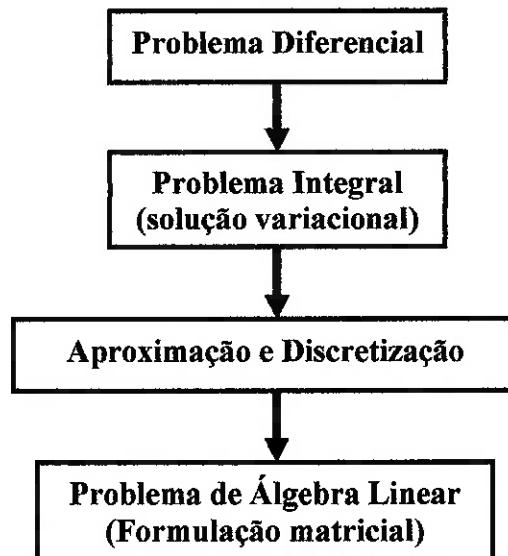


Fig. 5.5. Apresentação esquemática do MEF.

O MEF consiste num método de transformação de um problema, apresentado na forma integral, em um problema aproximado de álgebra linear, onde os coeficientes são integrais avaliadas sobre os elementos finitos da estrutura ou meio. Para se iniciar uma análise de elementos finitos como descrito na Fig. 5.5, é necessário que o modelo a ser projetado seja discretizado em uma malha de elementos finitos, que é a representação do domínio de projeto em subdomínios,

cujas dimensões devem ser pequenas o suficiente para permitir a linearização do problema (BATIVE, 1996), (NAILLON, 1983).

5.3.1. Formulação do elemento isoparamétrico de quatro nós

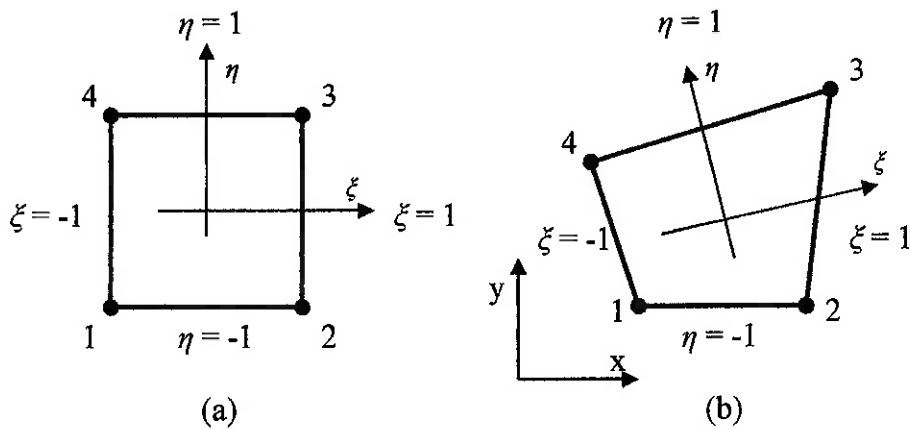


Fig. 5.6. Mapa de coordenadas isoparamétricas. (a) elemento em coordenadas locais; (b) elemento em coordenadas globais.

Considerando uma configuração bidimensional do elemento quadrilátero de quatro nós, no sistema de coordenadas locais (ξ, η) para um sistema de coordenadas globais (x, y) (Fig. 5.6), o deslocamento e o potencial elétrico podem ser expressos, respectivamente, para cada elemento como:

$$\{\mathbf{u}\}_e = [\mathbf{N}_u] \{\mathbf{u}_e\} \quad (5.14)$$

$$\{\varphi\}_e = [\mathbf{N}_\varphi] \{\varphi_e\} \quad (5.15)$$

onde:

$[\mathbf{N}_u]$ = função de forma de deslocamento mecânico

$[\mathbf{N}_\varphi]$ = função de forma de deslocamento elétrico

$\{\mathbf{u}_e\}$ = vetor deslocamento nodal

$\{\varphi_e\}$ = vetor potencial elétrico nodal (ou deslocamento elétrico nodal)

Como se pode observar na Fig. 5.6(a), o elemento em coordenadas locais (ξ, η) é quadrado, o que simplifica a visualização. Porém, deve-se trabalhar com coordenadas globais (x, y) , em que o mesmo elemento se apresenta na forma de um retângulo distorcido, o que dificulta o trabalho. Para isso, são introduzidas as funções de forma (N) que são usadas para converter as coordenadas locais em globais. Sendo a função de forma representada em função das coordenadas locais, pode-se expressar qualquer ponto em termos das coordenadas (x, y) dos nós pela Eq. 5.16.

$$\begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [\mathbf{N}] \begin{Bmatrix} \mathbf{x} \end{Bmatrix}_e \quad (5.16)$$

onde $\{\mathbf{x}\}_e$ é o vetor de coordenadas nodais do elemento, ou seja:

$$\{\mathbf{x}\}_e = \{x_1 \ y_1 \ x_2 \ y_2 \ x_3 \ y_3 \ x_4 \ y_4\}^T \quad (5.17)$$

e $[\mathbf{N}]$ é a função de forma expressa na forma matricial como:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

A função de forma são funções de interpolação de Lagrange e são expressas em coordenadas (x, y) :

$$\begin{aligned} N_1(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_2(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} \\ N_3(\xi, \eta) &= \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4} \\ N_4(\xi, \eta) &= \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Então, da Eq. 5.16, tem-se a representação das aproximações para as componentes horizontal e vertical respectivamente:

$$\begin{aligned} x &= N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 \\ y &= N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 \end{aligned} \quad (5.20)$$

Analogamente para o deslocamento elétrico, tem-se:

$$\varphi = N_1 \varphi_1 + N_2 \varphi_2 + N_3 \varphi_3 + N_4 \varphi_4 \quad (5.21)$$

5.4. Equações de equilíbrio

As análises e projetos de dispositivos piezelétricos apresentam uma desafiante variedade de atributos ao engenheiro: (1) a geometria e as condições de contorno do dispositivo são complexas; (2) o elemento que atua na vibração é composto por cerâmicas piezelétricas com eletrodos de metais; e (3) os dispositivos geralmente trabalham em altas freqüências. Por isso, as análises desses dispositivos necessitam de um bom modelo analítico e uma solução detalhada do elemento finito deste modelo. Isto é importante quando desejamos prever com acurácia modos de vibração não desejados. Esses modelos numéricos geram as equações piezelétricas de equilíbrio dadas por (LERCH, 1990), (NAILLON, 1983):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}_{uu} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{u\varphi} \Phi = \mathbf{F} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{K}_{\varphi u} \mathbf{U} + \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \Phi = \mathbf{Q} \quad (5.23)$$

onde \mathbf{M} , \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\varphi}$ e $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ são as matrizes de massa, rigidez mecânica, rigidez piezelétrica e de rigidez dielétrica, respectivamente. E \mathbf{U} , Φ , \mathbf{F} e \mathbf{Q} são, respectivamente, os vetores de deslocamento mecânico, potencial elétrico, força mecânica e carga elétrica.

As Eq. 5.22 e 5.23 podem ser simplificadas para a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \Phi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

e como o deslocamento em cada ponto é uma função oscilatória no tempo t , se não há amortecimento, pode-se representar o deslocamento como uma função seno, ou seja:

$$\mathbf{U} = A \sin \omega t \Rightarrow \dot{\mathbf{U}} = A\omega \cos \omega t \Rightarrow \ddot{\mathbf{U}} = -\omega^2 A \sin \omega t = -\omega^2 \mathbf{U} \quad (5.25)$$

onde A é a amplitude de oscilação, ω é a freqüência de operação e ϕ é a fase inicial de oscilação.

Com isso, é possível reescrever a Eq. 5.24 da forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{\Phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (5.26)$$

onde:

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}'_u \mathbf{c}^E \mathbf{B}_u dV \quad (5.27)$$

$$\mathbf{K}_{u\phi} = \int_V \mathbf{B}'_u \mathbf{e}' \mathbf{B}_\phi dV \quad (5.28)$$

$$\mathbf{K}_{\phi\phi} = \int_V \mathbf{B}'_\phi \mathbf{e}^S \mathbf{B}_\phi dV \quad (5.29)$$

$$\mathbf{M} = \int_V \rho \mathbf{N}'_u \mathbf{N}_u dV \quad (5.30)$$

$$\mathbf{B}_u = \mathbf{B} \mathbf{N}_u \quad (5.31)$$

$$\mathbf{B}_\phi = \mathbf{B} \mathbf{N}_\phi \quad (5.32)$$

ρ densidade do material

As integrais acima são definidas por LERCH, 1990 e a Eq. 5.26 é a equação principal de movimento analisado, neste trabalho, pelo MEF.

6. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA PARA O PROJETO DO SONOTRODO

Como já foi dito anteriormente, o objetivo da otimização topológica no software que será desenvolvido é uniformizar e maximizar a configuração dos deslocamentos numa dada região do sonotrodo, o qual vibra mediante excitação harmônica de um transdutor piezelétrico de potência.

A seguir tem-se uma figura ilustrando a definição do problema de OT assim como do domínio de projeto e condições de contorno do problema.

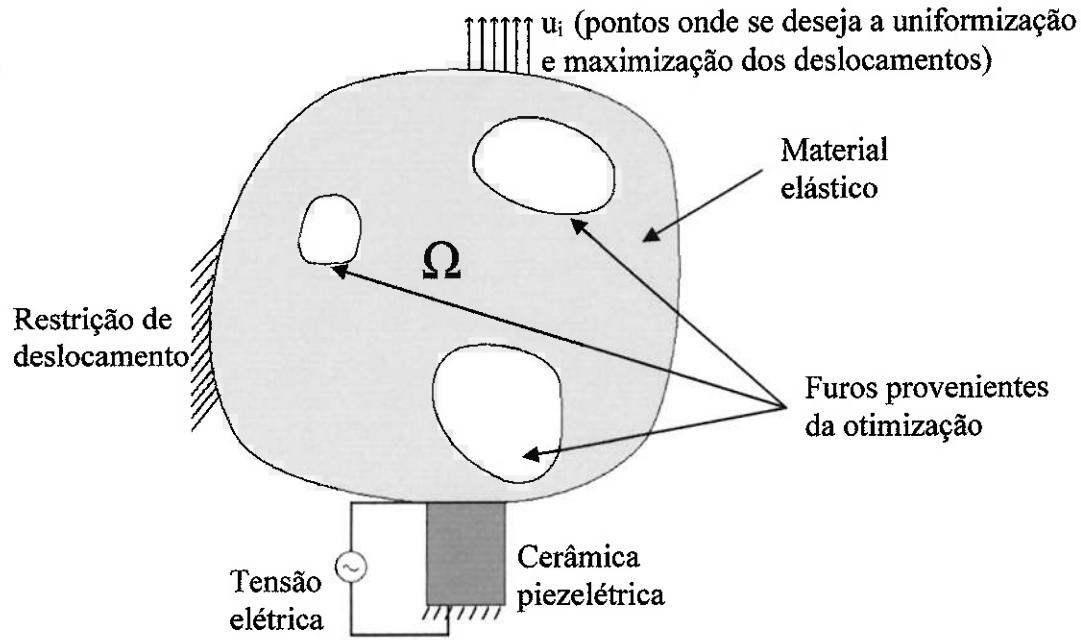


Fig. 6.1. Definição do problema de OT, do domínio de projeto e condições de contorno do problema.

Para desenvolver o software que execute o objetivo acima, foi utilizado como base um software acadêmico utilizado no projeto de atuadores piezelétricos flexionais, o qual apresenta os mesmos princípios básicos (como a obtenção da matriz de rigidez dos elementos), mas com formulações diferentes de MEF, MOT e de função objetivo, apresentadas no item 6.1. O primeiro progresso no software foi a adaptação deste software para o caso dinâmico no MEF e no MOT, que podem ser

observadas no item 6.2. Em seguida, no item 6.3, foi modificada a função objetivo do problema para que atendesse o problema do sonotrodo.

6.1. Formulação de OT do software acadêmico

O MEF desse software não considera a matriz de massa da estrutura, ou seja, analisa apenas situações estáticas das estruturas em estudo. Além disso, o MOT é formulado usando o método de densidades SIMP como modelo de material (item 4.4). A função objetivo visa combinar uma estrutura flexível para obter uma grande deformação num determinado ponto e com rigidez o suficiente para suportar os trabalhos externos. Para que isso seja possível o software combina duas formulações diferentes: maximizar a transdução média e minimizar a flexibilidade média. Estas formulações expressam os deslocamentos elétricos ou mecânicos em qualquer região do meio piezelétrico como uma função dos deslocamentos (obtidos através do MEF) e campo elétrico conhecido, causado por cargas elétricas aplicadas nos eletrodos da piezocerâmica. A transdução média está relacionada com o deslocamento gerado pelo atuador em uma determinada direção e ponto da estrutura, quando a piezocerâmica estiver submetida a um determinado diferencial de potencial (ou cargas elétricas). Já a flexibilidade média está relacionada com a rigidez estrutural do atuador de modo a dar estabilidade estrutural ao atuador. As definições de transdução média e flexibilidade média e os procedimentos matemáticos para a obtenção de ambas são apresentadas por SILVA, 1999 e CARBONARI, 2003.

Em termos gerais, a transdução média entre a região que se deseja otimizar e a região piezelétrica de um domínio é dada por:

$$L_2 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_2^t \\ \phi_2^t \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{\phi u} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} \quad (6.1)$$

onde \mathbf{U}_1 são os deslocamentos desejados na maximização e ϕ_1 é a tensão aplicada nas cerâmicas. \mathbf{U}_2 e ϕ_2 são os deslocamentos mecânicos e elétricos gerados pela força que indica a direção de saída ou movimento de atuação.

Já a flexibilidade média entre as mesmas regiões citadas anteriormente é dada por:

$$L_3 = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}'_3 \\ \phi'_3 \end{Bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}'_{u\phi} & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \quad (6.2)$$

onde \mathbf{U}_3 são os deslocamentos mecânicos gerados pela força que determina a rigidez da estrutura e $\{\mathbf{Q}_3\}'\{\phi_3\} = 0$.

Neste estágio, as matrizes \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\phi}$ e $\mathbf{K}_{\phi\phi}$ são dadas pelas equações 5.28, 5.29 e 5.30 respectivamente, e o módulo de elasticidade E do material em cada elemento é dado pela equação 4.5, substituindo C por E , resultando em:

$$E = \gamma^p E_0 \quad (6.3)$$

onde E_0 é o valor do módulo de elasticidade do material base do elemento, γ é a variável de projeto e p é a penalização. Portanto devemos maximizar L_2 e minimizar L_3 e para que se possa executar os dois problemas de otimização ao mesmo tempo, é introduzido o conceito de função multi-objetivo (SILVA, 1999), onde L_2 e L_3 são combinadas criando apenas uma função F .

$$F = \frac{L_2}{L_3} \quad (6.4)$$

generalizada na forma:

$$F = w \ln L_2 - (1-w) \ln L_3 \quad (6.5)$$

$$0 \leq w \leq 1$$

onde w é um coeficiente de peso. A segunda função objetivo permite controlar a contribuição da transdução média (Eq. 6.1) e a flexibilidade média (Eq. 6.2) no projeto, sendo a generalização da Eq. 6.4. Foi observado que qualquer variação na transdução média tem uma menor influência no projeto do atuador do que a

flexibilidade média. Nestes problemas, um grande valor de w deve ser usado para garantir a maximização da transdução média L_2 , e assim o deslocamento gerado. Além disso, esta função permite controlar a flexibilidade final da estrutura.

Assim o problema de otimização (definido na forma contínua) pode ser expresso como (SILVA, 1999):

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } F &= \frac{L_2}{L_3} \\ \text{Tal que } \left\{ \begin{array}{l} \text{Restrições de transdução e flexibilidade média} \\ \text{Restrição de volume} \\ 0 < \gamma_{\min} \leq \gamma \leq 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

6.2. Formulação de OT estendida para o caso dinâmico

Como este projeto considera uma situação dinâmica, é necessário incluir a matriz de massa no MEF de cada elemento e modificar o modelo de material para o método RAMP de densidades (item 4.4). A mudança é feita, como já dito em item anterior, para diminuir o aparecimento, em grande escala nos casos dinâmicos, dos materiais intermediários (“escalas de cinza”), que são um problema na interpretação dos resultados. Outra preocupação com projetos dinâmicos é a necessidade de lidar com a freqüência de operação ω_0 da estrutura. Para operação confiável do sonotrodo, essa freqüência deve estar abaixo da primeira freqüência de ressonância ω_r (freqüência natural de vibração) ou entre freqüências naturais consecutivas de vibração. Neste trabalho o sonotrodo será projetado abaixo da primeira freqüência de ressonância (CARDONI, 2002).

Portanto, as novas equações para transdução média (L_2) e flexibilidade média (L_3) são dadas por:

$$\begin{aligned} L_2 &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_2^t \\ \phi_2^t \end{Bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}' & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \phi_1 \end{Bmatrix} \\ L_3 &= \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_3^t \\ \phi_3^t \end{Bmatrix}' \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\phi} \\ \mathbf{K}_{u\phi}' & \mathbf{K}_{\phi\phi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_3 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6.6)$$

As matrizes \mathbf{K}_{uu} , $\mathbf{K}_{u\varphi}$, $\mathbf{K}_{\varphi\varphi}$ e \mathbf{M}_{uu} são dadas pelas equações 5.27, 5.28, 5.29 e 5.30 respectivamente. O módulo de elasticidade do material, antes formulada pelo SIMP (Eq. 6.3) é agora dada, pelo RAMP (Eq. 4.6), por (HANSEN, 2005), (BENDSØE, 2003):

$$E = E_{\min} + \frac{\gamma}{1 + p(1 - \gamma)} (E_0 - E_{\min}) \quad (6.7)$$

Deve-se estender esse conceito de RAMP para a densidade ρ de cada elemento. Então, a Eq. 4.6 fica:

$$\rho = \rho_{\min} + \frac{\gamma}{1 + p(1 - \gamma)} (\rho_0 - \rho_{\min}) \quad (6.8)$$

onde γ é a variável de projeto, p é a penalização, E_0 e ρ_0 são os valores do módulo de elasticidade e da densidade para o material base, e E_{\min} e ρ_{\min} são valores muito pequenos dessas propriedades para evitar singularidades. A função multi-objetivo e a formulação de OT não mudam nesta etapa.

6.3. Formulação de OT para deslocamentos uniformes

Partimos agora para o desenvolvimento da formulação que garantirá os deslocamentos uniformes no plano do sonotrodo em contato com o tecido. A implementação dessa nova formulação é necessária pois a formulação contida no software até este ponto só garante a maximização dos deslocamentos, maximizando também a rigidez da estrutura sem levar em consideração a uniformização desses deslocamentos.

Então, seguindo o procedimento, mantemos as formulações para o caso dinâmico (inclusão da matriz de massa (Eq. 6.6) e a modificação do modelo SIMP para RAMP (Eq. 6.7 e 6.8)) e modificamos o problema de otimização topológica.

Baseado nos argumentos dos capítulos 4 e 5 e na Fig. 6.1, pode-se propor um problema de otimização que é a combinação de duas funções objetivo, a função que

maximiza e uniformiza os deslocamentos e a função que maximiza a rigidez da estrutura:

$$\underset{\gamma, \beta}{\text{Min}} \quad F = w \ln \left\{ \left[\sum_{i=1}^s (u_{1i} - \beta)^2 \right] - k\beta \right\} - (1-w) \ln(L_3) \quad (6.9)$$

Tal que: $\begin{cases} \text{Equações de equilíbrio para uma certa freqüência } \omega \\ 0 \leq \gamma \leq 1 \\ \int_{\Omega} \gamma d\Omega \leq \Omega_S \\ 0 \leq \beta \end{cases}$

onde u_{1i} são os deslocamentos dos pontos onde se deseja a otimização, γ é a variável pseudo-densidade, β é uma variável auxiliar, e S é a quantidade total de deslocamentos do domínio que serão submetidos a otimização. L_3 é a flexibilidade média dada pela Eq. 6.2, e w é um peso atribuído às funções objetivos a fim de se estabelecer uma prioridade de uma função sobre a outra.. As equações de equilíbrio são dadas na forma matricial pela Eq. 5.26. Ω caracteriza o domínio de trabalho e Ω_S é o volume para qual deseja-se restringir o domínio. As considerações feitas sobre a freqüência de ressonância no item 6.2 são válidas nesta etapa.

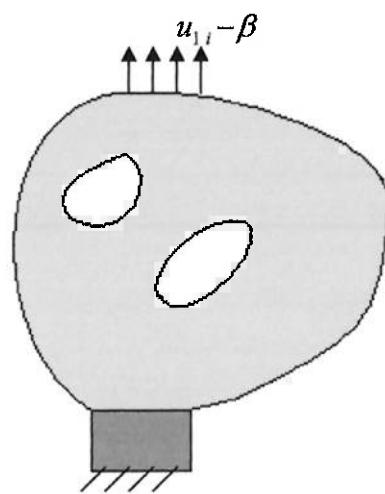


Fig. 6.2. Ilustração dos deslocamentos $u_{1i} - \beta$.

Ou seja, pelo termo de F associado a w , queremos minimizar a diferença absoluta entre os deslocamentos u_{1i} e uma variável auxiliar β (Fig. 6.2), sendo que

essa variável será maximizada devido ao fator k , na tentativa de uniformizar e maximizar as amplitudes dos deslocamentos numa região desejada. O outro termo, associado à $(1-w)$, é que maximizará a rigidez da estrutura, garantindo que exista uma estrutura no domínio de projeto.

6.4. Análise de sensibilidades

Os gradientes (ou derivadas) da função objetivo e restrições são chamados de sensibilidades do problema de otimização. O cálculo desses gradientes é importante devido à necessidade da linearização da função objetivo em relação as variáveis do problema (que são relacionadas a cada elemento do domínio discretizado), como veremos mais adiante na implementação numérica da rotina de programação linear seqüencial (PLS). Diante desta necessidade, neste item são apresentados os gradientes das funções objetivos apresentadas anteriormente, ou seja, da função objetivo do software acadêmico, do software acadêmico estendido para o caso dinâmico e para o problema de deslocamentos uniformes.

6.4.1. Gradiente da formulação de OT do software acadêmico

Para o caso do software acadêmico (item 6.1), temos que a derivada da função objetivo dada pela Eq. 6.4, em relação à variável de projeto γ_j , para cada elemento, é:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_j} = \frac{1}{L_3} \left(\frac{\partial L_2}{\partial \gamma_j} \right) - \frac{L_2}{L_3^2} \left(\frac{\partial L_3}{\partial \gamma_j} \right) \quad (6.10)$$

onde $\partial L_2 / \partial \gamma_j$ e $\partial L_3 / \partial \gamma_j$ são as derivadas da transdução e flexibilidade média, respectivamente, em relação à variável γ_j , com $j=1, \dots, M$ e M é o número total de elementos no domínio. O desenvolvimento dessas derivadas são dados por CARBONARI, 2003, e resultam em:

$$\frac{\partial L_2}{\partial \gamma_j} = -\left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_2^t \\ \phi_2^t \end{matrix} \right\}' \left[\begin{matrix} \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} & \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial \mathbf{K}_{u\phi}^t}{\partial \gamma_j} & -\frac{\partial \mathbf{K}_{\phi\phi}}{\partial \gamma_j} \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_1 \\ \phi_1 \end{matrix} \right\} \quad (6.11)$$

A Eq. 6.10 é uma expressão geral para a análise de sensibilidade da transdução média, pois considera que todo o domínio (Ω) discretizado seja otimizável. No entanto, o elemento piezelétrico é não-otimizável (não depende da variável d projeto). Com isto, a Eq. 6.10 pode ser simplificada:

$$\frac{\partial L_2}{\partial \gamma_j} = -\left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_2^t \\ \phi_2^t \end{matrix} \right\}' \left[\begin{matrix} \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_1 \\ \phi_1 \end{matrix} \right\} = -\left\{ \mathbf{U}_2^t \right\} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} \right] \left\{ \mathbf{U}_1 \right\} \quad (6.12)$$

lembrando que, para o elemento piezelétrico, $\left[\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} \right]$ é igual a zero.

De forma análoga, temos, para a flexibilidade média, a seguinte expressão para a derivada:

$$\frac{\partial L_2}{\partial \gamma_j} = -\left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_3^t \\ \phi_3^t \end{matrix} \right\}' \left[\begin{matrix} \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right] \left\{ \begin{matrix} \mathbf{U}_3 \\ \phi_3 \end{matrix} \right\} = -\left\{ \mathbf{U}_3^t \right\} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} \right] \left\{ \mathbf{U}_3 \right\} \quad (6.13)$$

6.4.2. Gradiente da formulação de OT do software acadêmico estendido para o caso dinâmico

Agora, ao analisarmos a função objetivo da segunda formulação (item 6.2), percebe-se que a mudança está nas expressões da transdução e flexibilidade média. Mudança causada pela modificação na formulação de elementos finitos. Como o desenvolvimento é análogo ao feito anteriormente, temos então:

$$\frac{\partial L_2}{\partial \gamma_j} = -\left\{ \mathbf{U}_2^t \left[\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \gamma_j} \right] \mathbf{U}_1 \right\} \quad (6.14)$$

para a transdução média e

$$\frac{\partial L_3}{\partial \gamma_j} = -\left\{ \mathbf{U}_3^t \left[\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} - \omega^2 \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \gamma_j} \right] \mathbf{U}_3 \right\} \quad (6.15)$$

para a flexibilidade média.

Como foi utilizado o modelo RAMP nesta etapa, as derivadas $\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j}$ e $\frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \gamma_j}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma_j} &= \frac{1+p}{[1+p(1-\gamma_j)]^2} (E_0 - E_{\min}) \mathbf{K}_{uu}^0 \\ \frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \gamma_j} &= \frac{1+p}{[1+p(1-\gamma_j)]^2} (\rho_0 - \rho_{\min}) \mathbf{M}_{uu}^0 \end{aligned} \quad (6.16)$$

onde p é a penalidade, γ é a variável de projeto, E_0 e ρ_0 são os valores do módulo de elasticidade e da densidade para o material base, E_{\min} e ρ_{\min} são valores muito pequenos dessas propriedades para evitar singularidades, e \mathbf{K}^0 e \mathbf{M}^0 são as matrizes de rigidez e de massa base para cada elemento.

6.4.3. Gradiente da formulação de OT para deslocamentos uniformes

Analizando a última formulação apresentada (item 6.3), deve-se apenas derivar a função objetivo, pois a análise do MEF é idêntica à apresentada no item 6.2 e, consequentemente, as derivadas das matrizes de rigidez e massa serão as mesmas. A derivada dessa função objetivo em relação a cada γ_j do domínio resulta em:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_j} = \left\{ \frac{w}{\left[\sum_{i=1}^s (u_{1i} - \beta)^2 \right] - k\beta} \sum_{i=1}^s 2(u_{1i} - \beta) \frac{\partial u_{1i}}{\partial \gamma_j} \right\} - \left\{ \left(\frac{1-w}{L_3} \right) \frac{\partial L_3}{\partial \gamma_j} \right\} \quad (6.17)$$

onde γ_j com $j=1, \dots, M$ são as variáveis de projeto, ou seja, são as pseudo-densidades de cada elemento do domínio e M é a quantidade total de elementos. u_{1i} com $i=1, \dots, S$ são os deslocamentos dos pontos onde se deseja otimizar e S é a quantidade total desses deslocamentos. $\frac{\partial L_3}{\partial \gamma_j}$ é dado pela Eq. 6.15.

Entretanto, podemos reescrever o termo $\sum_{i=1}^s 2(u_{1i} - \beta) \frac{\partial u_{1i}}{\partial \gamma_j}$ da Eq. 6.17 na forma matricial da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^s 2(u_{1i} - \beta) \frac{\partial u_{1i}}{\partial \gamma_j} = 2 \{ (u_{11} - \beta) \quad (u_{12} - \beta) \quad \dots \quad (u_{1s} - \beta) \} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{11}}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial u_{12}}{\partial \gamma_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial u_{1s}}{\partial \gamma_j} \end{Bmatrix} \quad (6.18)$$

o que implica no mesmo resultado da somatória. Pode-se também impor que:

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} (u_{11} - \beta) \\ (u_{12} - \beta) \\ \vdots \\ (u_{1s} - \beta) \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \{\mathbf{B}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial \gamma_j} \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

onde $\{\mathbf{B}\}$ é o vetor das derivadas dos deslocamentos mecânicos $\{\frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \gamma_j}\}$ e elétricos $\{\frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial \gamma_j}\}$. Porém, não se pode fazer a multiplicação dos vetores $\{\mathbf{A}\}$ e $\{\mathbf{B}\}$ pois o primeiro tem dimensões $S \times 1$ e o segundo tem dimensões $N \times 1$, onde N é o

número total de deslocamentos mecânicos (vertical e horizontal) e elétricos. Então cria-se o vetor $\{\mathbf{C}\}$ com dimensões $N \times 1$ que contém S posições com os valores do vetor $\{\mathbf{A}\}$, que são as posições correspondentes aos deslocamentos que se deseja otimizar, e $(N-S)$ posições com o valor zero. Ou seja:

$$\{\mathbf{C}\} = \{0 \ A_1 \ \cdots \ 0 \ 0 \ A_{38} \ \cdots \ A_S \ \cdots \ 0\}^T \quad (6.20)$$

Agora, fazendo a multiplicação de $\{\mathbf{C}\}$ por $\{\mathbf{B}\}$ tem-se o mesmo resultado da Eq. 6.18.

$$D = \{\mathbf{C}\}^T \{\mathbf{B}\} \quad (6.21)$$

Assim, a derivada da função objetivo fica:

$$\frac{\partial F}{\partial \gamma_j} = \left\{ \frac{w}{\left[\sum_{i=1}^S (u_{1i} - \beta)^2 \right] - k\beta} D \right\} - \left\{ \left(\frac{1-w}{L_3} \right) \frac{\partial L_3}{\partial \gamma_j} \right\} \quad (6.22)$$

sendo necessário somente calcular $\{\mathbf{B}\}$, pois todos os outros valores e vetores são conhecidos. Então, partindo da Eq. 5.26:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{\Phi}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{Q}_1 \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

sua derivada fica:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}]}{\partial \gamma_j} & \frac{\partial \mathbf{K}_{u\varphi}}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial \mathbf{K}'_{u\varphi}}{\partial \gamma_j} & \frac{\partial \mathbf{K}_{\varphi\varphi}}{\partial \gamma_j} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{\Phi}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial \gamma_j} \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.24)$$

já que o vetor de forças e carregamentos não depende da variável de projeto e sua derivada é zero. Agora, levando em consideração que a parte elétrica não depende da variável de projeto, chega-se à seguinte equação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{U}_1}{\partial \gamma_j} \\ \frac{\partial \mathbf{\Phi}_1}{\partial \gamma_j} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}]}{\partial \gamma_j} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{\Phi}_1 \end{Bmatrix} \quad (6.25)$$

Simplificando:

$$\{\mathbf{B}\} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}]}{\partial \gamma_j} \{\mathbf{U}_1\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Finalmente, substituindo a Eq. 6.26, na Eq. 6.21:

$$D = -\{\mathbf{C}\}^t \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial [\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}]}{\partial \gamma_j} \{\mathbf{U}_1\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.27)$$

Para simplificar ainda mais o cálculo de D , pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \{\lambda\} = \{\mathbf{C}\} \Rightarrow \{\lambda\} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}^{-1} \{\mathbf{C}\} \quad (6.28)$$

e como a matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}^{-1}$ é simétrica, então:

$$\{\lambda\}^t = \{\mathbf{C}\}^t \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}'_{u\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix}^{-1} \quad (6.29)$$

onde λ representa um vetor de deslocamentos gerados por um vetor de forças com intensidades $u_{1i}-\beta$ nas posições correspondentes aos pontos onde se deseja a otimização e zero nas posições restantes. Ou seja, seria o vetor $\{C\}$ se este fosse um vetor de forças. Portanto, substituindo na Eq. 6.27:

$$D = -\{\lambda\}' \begin{bmatrix} \frac{\partial[\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}]}{\partial \gamma} \{U_1\} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.30)$$

A derivada $\left[\frac{\partial[\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}]}{\partial \gamma} \right]$ resulta em:

$$\left[\frac{\partial[\mathbf{K}_{uu} - \omega^2 \mathbf{M}_{uu}]}{\partial \gamma} \right] = \left[\left[\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma} \right] - \omega^2 \left[\frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \gamma} \right] \right] \quad (6.31)$$

cujos termos $\left[\frac{\partial \mathbf{K}_{uu}}{\partial \gamma} \right]$ e $\left[\frac{\partial \mathbf{M}_{uu}}{\partial \gamma} \right]$ são definidos na Eq. 6.16.

É necessário agora, derivar a função objetivo (Eq. 6.9) em relação a β .

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = \frac{w}{\left[\sum_{i=1}^s (u_{1i} - \beta)^2 \right] - k\beta} \sum_{i=1}^s [2(u_{1i} - \beta) - k] \quad (6.32)$$

7. IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Os problemas de otimização apresentados no capítulo 6, podem ser resolvidos numericamente através de um algoritmo computacional que combina o método de otimização de programação linear (PLS) (DANZIG, 1963; YANG, 1994; HAFTKA, 1996) com o método numérico de análise por elementos finitos (MEF).

O método PLS é um método classificado como genérico, ou seja, os métodos genéricos consistem em métodos de otimização que são baseados na chamada teoria de programação matemática e podem ser aplicados em qualquer problema de otimização, seja no projeto de estruturas ou em outros ramos de aplicação. O PLS vem sendo aplicado com sucesso na otimização topológica. É uma rotina que resolve, seqüencialmente vários subproblemas lineares na busca da solução do problema não linear, o qual geralmente possui uma função complexa, um grande número de variáveis de projeto e várias restrições. No próximo item é feito um detalhamento maior sobre o PLS.

7.1. Programação linear seqüencial

O problema de otimização no projeto do sonotrodo, considerando as restrições, foi formulado no item 6.3.

A programação linear (YANG, 1994) resolve um problema de otimização em que a função objetivo e as restrições são funções lineares em relação às variáveis do problema, ou seja, o problema de ter a seguinte forma:

$$\underset{x}{\text{Maximizar}} \quad F(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \quad (7.1)$$

$$\text{Sujeita à:} \quad g_i^1(x) = b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n \leq c_i, \quad (i = 1, \dots, m_1) \quad (7.2)$$

$$g_j^2(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \geq d_j, \quad (j = 1, \dots, m_2) \quad (7.3)$$

$$g_k^3(x) = d_1x_1 + d_2x_2 + \dots + d_nx_n = e_k, \quad (k = 1, \dots, m_3) \quad (7.4)$$

Embora a função objetivo do problema de otimização mostrado no capítulo 6 (item 6.3), que queremos maximizar, não seja linear em relação às variáveis do

problema, que são as densidades de cada ponto do domínio estendido fixo de projeto, o problema pode ser linearizado calculando-se a Série de Taylor de 1^a ordem da função objetivo. Sabe-se do cálculo diferencial que a série de Taylor pode representar uma função $f(x)$, para x próximo de um valor x_0 , a menos de um erro $e(x)$, como ilustra a equação abaixo:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x=x^0} (x - x_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{x=x^0} \frac{(x - x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{\partial^N f}{\partial x^N} \Big|_{x=x^0} \frac{(x - x_0)^N}{N!} + e(x) \quad (7.5)$$

Para uma função com n variáveis, teríamos:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_{x=x^0} (x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{\partial^N f}{\partial x_1^N} \Big|_{x=x^0} \frac{(x_1 - x_{01})^N}{N!} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_{x=x^0} (x_2 - x_{02}) + \dots + \frac{\partial^N f}{\partial x_2^N} \Big|_{x=x^0} \frac{(x_2 - x_{02})^N}{N!} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_N} \Big|_{x=x^0} (x_N - x_{0N}) + \dots + \frac{\partial^N f}{\partial x_N^N} \Big|_{x=x^0} \frac{(x_N - x_{0N})^N}{N!} + e(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (7.6)$$

Os termos com derivada de segunda ordem ou superior são desprezados, obtendo uma linearização da função objetivo, para ser utilizada na PL. Então, podemos linearizar a função objetivo (F_2), como:

$$F_2 = F_2^0 + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \Big|_{\rho=\rho^0} (\rho_1 - \rho_1^0) + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \Big|_{\rho=\rho^0} (\rho_2 - \rho_2^0) + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_N} \Big|_{\rho=\rho^0} (\rho_N - \rho_N^0) \quad (7.7)$$

Separando os termos constantes dos termos dependentes das variáveis (Eq. 7.7), temos:

$$F_2 = F_2^0 - \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1^0 - \dots - \frac{\partial F_2}{\partial \rho_N} \rho_N^0}_{\text{constantes}} + \underbrace{\frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_N} \rho_N}_{\text{variáveis}} \quad (7.8)$$

As constantes podem ser retiradas da Eq. 7.8, pois não influenciam no processo de maximização da função. Desta maneira a função a ser maximizada na PL é dada por:

$$F_2^{\text{linear}} = \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \rho_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_N} \rho_N \quad (7.9)$$

Observe que agora a função a ser maximizada (Eq. 7.9) é linear, onde os coeficientes das densidades ρ_i (variáveis) são as derivadas (ou sensibilidades) da função objetivo do problema de otimização (função F_2) em relação à variável do problema, no ponto $\rho=\rho_0$.

Como visto anteriormente, a idéia primária do PLS para solucionar o problema de otimização não-linear é fazer uma aproximação por sucessivos subproblemas lineares que são resolvidos por método de programação linear, Simplex (DANTZIG, 1963) ou Kamarkar (HAFTKA, 1996). Para que essa aproximação seja válida é necessário limitar a variação do valor da variável de projeto (variável do problema de otimização) em cada subproblema linear através dos limites móveis (THOMAS, 1992). Para entender melhor este conceito, considere a função não-linear $F(x)$ mostrada no gráfico da Fig. 7.1.

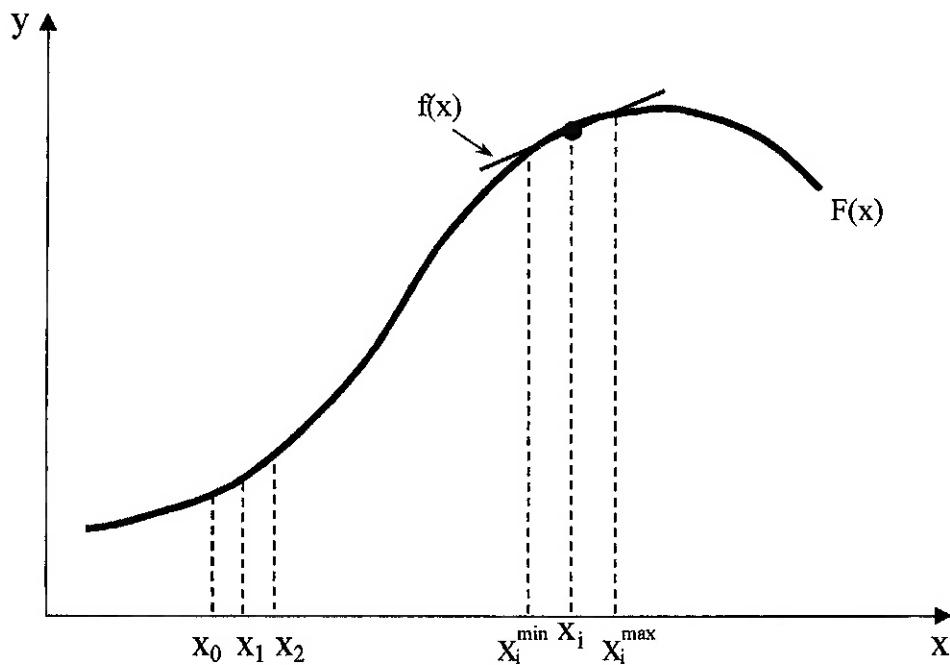


Fig. 7.1. Limites móveis.

Considere também a função linear $f(x)$ como uma aproximação da função não-linear $F(x)$ em torno do ponto x_i . Observa-se que a aproximação linear (função $f(x)$) somente é válida em torno do ponto x_i , assim, à medida que se afasta de x_i se distancia do valor real da função $F(x)$. Conseqüentemente, definem-se os valores máximo e mínimo em torno de x_i , onde a aproximação linear é válida, os limites móveis da variável x_i . A cada iteração a rotina de PLS maximiza a função linear $f(x)$ no intervalo dos limites móveis (x_i^{\min} e x_i^{\max}) e encontra o valor ótimo para a variável x_i , que será utilizada na iteração seguinte. Assim as iterações seguem sucessivamente, substituindo-se como valor inicial da iteração posterior o valor ótimo de x_i encontrado na iteração anterior, até ocorrer a convergência da solução.

Os limites são considerados móveis pelo fato da variável x_i assumir um valor diferente a cada iteração da rotina PLS. Esses limites são definidos como valores relativos em relação ao valor dessa variável. Porém é necessário observar que, se os valores utilizados para os limites móveis forem muito grandes, o erro da aproximação linear será grande, podendo causar inclusive a perda do ponto ótimo. Em contra partida, se forem muito pequenos o custo computacional para obter a solução ótima (no caso o ponto de máximo da função $F(x)$) será muito grande. Uma

forma de tentar minimizar esse impasse e tornar mais rápido a convergência da solução é assumir valores grandes para os limites móveis na região em que a função não-linear $F(x)$ apresente um raio de curvatura grande, pois nessa região a função não-linear $F(x)$ tem praticamente o mesmo comportamento da aproximação linear (função $f(x)$). Já na região em que a função apresenta um pequeno raio de curvatura, os limites móveis devem ser pequenos. Além disso, à medida que nos aproximamos da convergência da solução (ponto de máximo da função não-linear $F(x)$) devemos reduzir bastante os valores dos limites móveis, caso contrário podemos “passar” pelo ponto máximo gerando oscilação no valor da função $F(x)$.

Uma escolha inadequada dos valores dos limites móveis pode tornar o método da PLS desvantajoso, bem como não fazer um ajuste mais precioso desses limites quando nos aproximamos do valor ótimo da função objetivo. Em geral, são utilizados valores em torno de 15% do valor de x_i para os limites móveis. Uma alternativa é utilizar as informações das derivadas da função objetivo e das restrições para a determinação dos limites móveis (CHEN, 1993) (não considerada neste trabalho).

Além da função objetivo, o PL exige que as restrições do problema de otimização também sejam funções lineares em relação às variáveis de problema. Considerando em particular o problema de otimização definido neste trabalho (item 6.3), as restrições que dependem das variáveis do problema são dadas por:

$$\int_{\Omega} \gamma d\Omega - \Omega_s \leq 0 \quad (7.10)$$

$$0 \leq \gamma \leq 1 \quad (7.11)$$

onde a Eq 7.10 é a restrição de volume de material e a Eq. 7.11 é a restrição ao valor limite (superior e inferior) da variável de problema.

A Eq. 7.10 é composta por duas parcelas, sendo uma delas indicada por Ω_s , que é um valor desejado e estabelecido previamente para o volume final de material na estrutura a ser otimizada. A outra parcela, indicada pela integral $\int_{\Omega} \gamma d\Omega$ é o valor

do volume de material obtido após a otimização e que depende dos valores da densidade de cada ponto do domínio da estrutura otimizada. Como o domínio da

estrutura é discretizado em elementos finitos, para se obter uma solução numérica do problema de otimização, consideramos a pseudo-densidade de cada elemento (γ_i) como sendo a variável do problema, de tal forma que o volume total de material na estrutura possa ser representado pela somatória do produto entre o volume de cada elemento e sua pseudo-densidade. Desta forma, temos a restrição da Eq. 7.11 como uma função linear em relação a variável do problema γ_i , ou seja:

$$\sum_{i=1}^M V_i \rho_i \leq V^* \quad (7.12)$$

onde V_i é o volume de cada elemento e V^* é a restrição do volume de material no domínio discretizado e M é o número total de elementos finitos.

Já a Eq. 7.11 (restrição da variável do problema), faz com que o valor da variável do problema seja limitado dentro de uma faixa. Esta faixa representa uma variação da presença de material no domínio da estrutura, onde o valor 0 (zero) indica ausência de material (“buraco”) e 1 indica a total presença de material. Observa-se que, como a rigidez e a massa do elemento finito estão condicionadas diretamente com as propriedades efetivas do material, a penalidade do material intermediário é feita nas matrizes de rigidez (\mathbf{k}_e) e massa (\mathbf{m}_e) do elemento, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_e &= \left[E_e^{\min} + \frac{\gamma_e}{1 + p(1 - \gamma_e)} (E_e^0 - E_e^{\min}) \right] \mathbf{k}_e^0 \\ \mathbf{m}_e &= \left[\rho_e^{\min} + \frac{\gamma_e}{1 + p(1 - \gamma_e)} (\rho_e^0 - \rho_e^{\min}) \right] \mathbf{m}_e^0 \end{aligned} \quad (7.14)$$

para a formulação dos itens 6.2 e 6.3, onde γ_e é a variável pseudo-densidade do elemento e p é o fator de penalidade. E_e^0 e ρ_e^0 são os valores do módulo de elasticidade e da densidade efetivos do material base, respectivamente. E_e^{\min} e ρ_e^{\min} são os valores mínimos para essas propriedades para que não ocorram singularidades nas matrizes e consequentemente o mau condicionamento numérico. \mathbf{k}_e^0 e \mathbf{m}_e^0 são as

matrizes de rigidez e massa base do elemento (não são inclusas o módulo de elasticidade e densidade nessas matrizes).

Finalmente, o problema a ser inserido na rotina de Programação Linear adquire a seguinte forma:

$$\underset{\gamma}{\text{Maximizar}}: F_2^{\text{linear}} = \frac{\partial F_2}{\partial \rho_1} \rho_1 + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_2} \rho_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial \rho_N} \rho \quad (7.15)$$

$\rho = \rho^0$ $\rho = \rho^0$ $\rho = \rho^0$

$$\text{Sujeita à:} \quad \sum_{i=1}^M V_i \gamma_i \leq V^* \quad (7.16)$$

$$0 < \gamma_{\min} \leq \gamma \leq 1, \quad i=1, \dots, M \quad (7.17)$$

A solução numérica do problema de programação linear (PL) pode ser obtida usando-se o método Simplex (DANZIG, 1963) ou o método Kamarkar (HAFTKA, 1996) que buscam, dentro de um conjunto de soluções possíveis para o problema, à solução que satisfaz as restrições e maximize a função objetivo. Geralmente, as rotinas de PL podem ser encontradas na literatura, como por exemplo, a rotina SIMPLEX (PRESS et al., 1999) que usa o método Simplex, ou disponibilizadas gratuitamente pela rede mundial de computadores (internet), como é o caso da rotina conhecida por DSPLP, que também usa o método SIMPLEX.

8. RESULTADOS E CONCLUSÕES

8.1. Sonotrodo atual

Para que tenhamos um bom resultado no corte do tecido, o sonotrodo deve, dada uma excitação do transdutor piezelétrico, transmitir a vibração de modo que o deslocamento de todos os pontos do plano em contato com o tecido seja uniforme, ou seja, deslocamentos iguais.

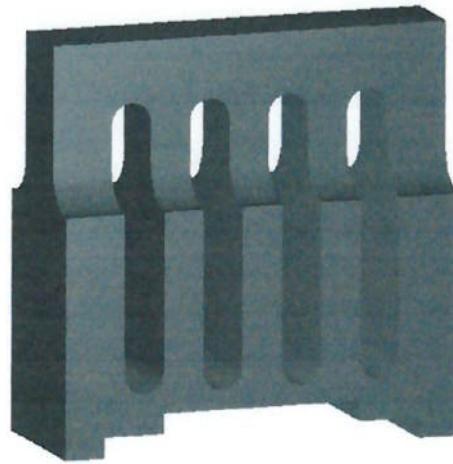


Fig. 8.1. Sonotrodo utilizado atualmente nas máquinas de corte de tecidos.

Com o sonotrodo que se tem em uso atualmente (Fig. 8.1), os deslocamentos dos pontos do plano em contato com o tecido são muito diferentes um do outro, sendo mínimo em nas extremidades, pequeno no centro, e máximo em duas regiões entre o centro do sonotrodo e suas extremidades, como se pode observar na Fig. 8.2.

Isto é ocasionado pelo excesso de massa do sonotrodo. Mediante um deslocamento estático, a massa não interfere no comportamento dos deslocamentos, porém, se for aplicada uma excitação (que é o caso de trabalho) a massa interfere nos resultados como inércia, ou seja, ela tende a permanecer no seu estado atual a menos que uma perturbação seja aplicada. Como a excitação do transdutor é aplicada somente no centro do sonotrodo (Fig. 8.2), a massa das extremidades tendem a permanecerem paradas, ocasionando a diferença dos deslocamentos.

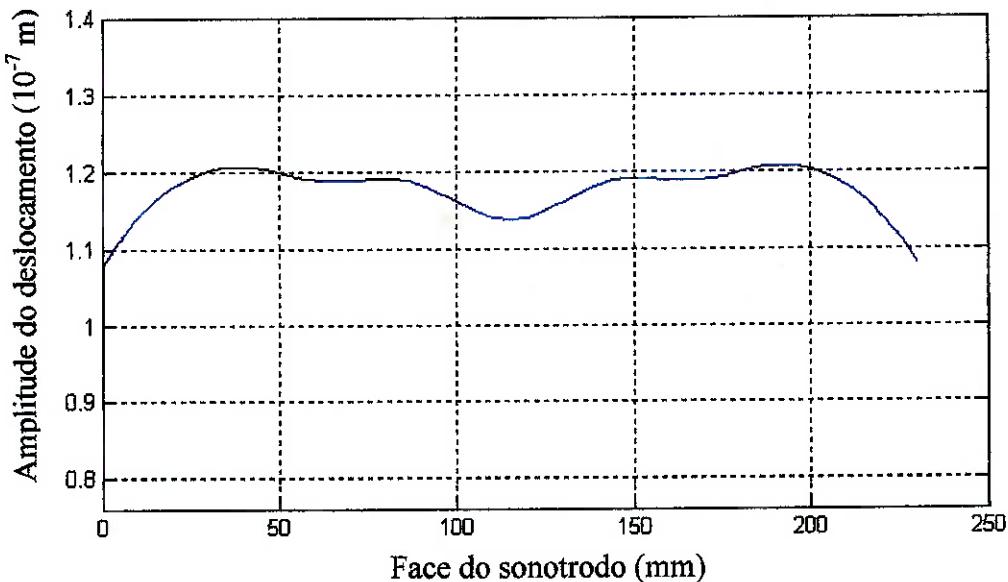


Fig. 8.2. Gráfico do perfil de deslocamentos do sonotrodo mediante excitação elétrica.

Este trabalho tem por objetivo, com auxílio do MOT e do MEF, encontrar a topologia ótima do sonotrodo, uniformizando os deslocamentos dos pontos do plano em contato com o tecido. A uniformidade dos deslocamentos é obtida quando a diferença entre a amplitude máxima e mínima desse plano não excede 2%. Pelo gráfico da Fig. 8.2, temos que o mínimo deslocamento é igual a $1,08 \times 10^{-7}$ m e o máximo deslocamento é igual a $1,21 \times 10^{-7}$ m, o que resulta numa diferença de 10,74%, confirmando que esse sonotrodo não atende às especificações de corte do tecido.

8.2. O Software

O software utilizado é implementado pelos seguintes passos:

- É feita, a partir de um arquivo gerado pelo software comercial ANSYS, a leitura dos dados iniciais, como o domínio discretizado, condições de contorno, cargas aplicadas, região onde se deseja o máximo deslocamento (Fig. 8.3), assim como “chute inicial” para a variável de projeto, restrição de volume;

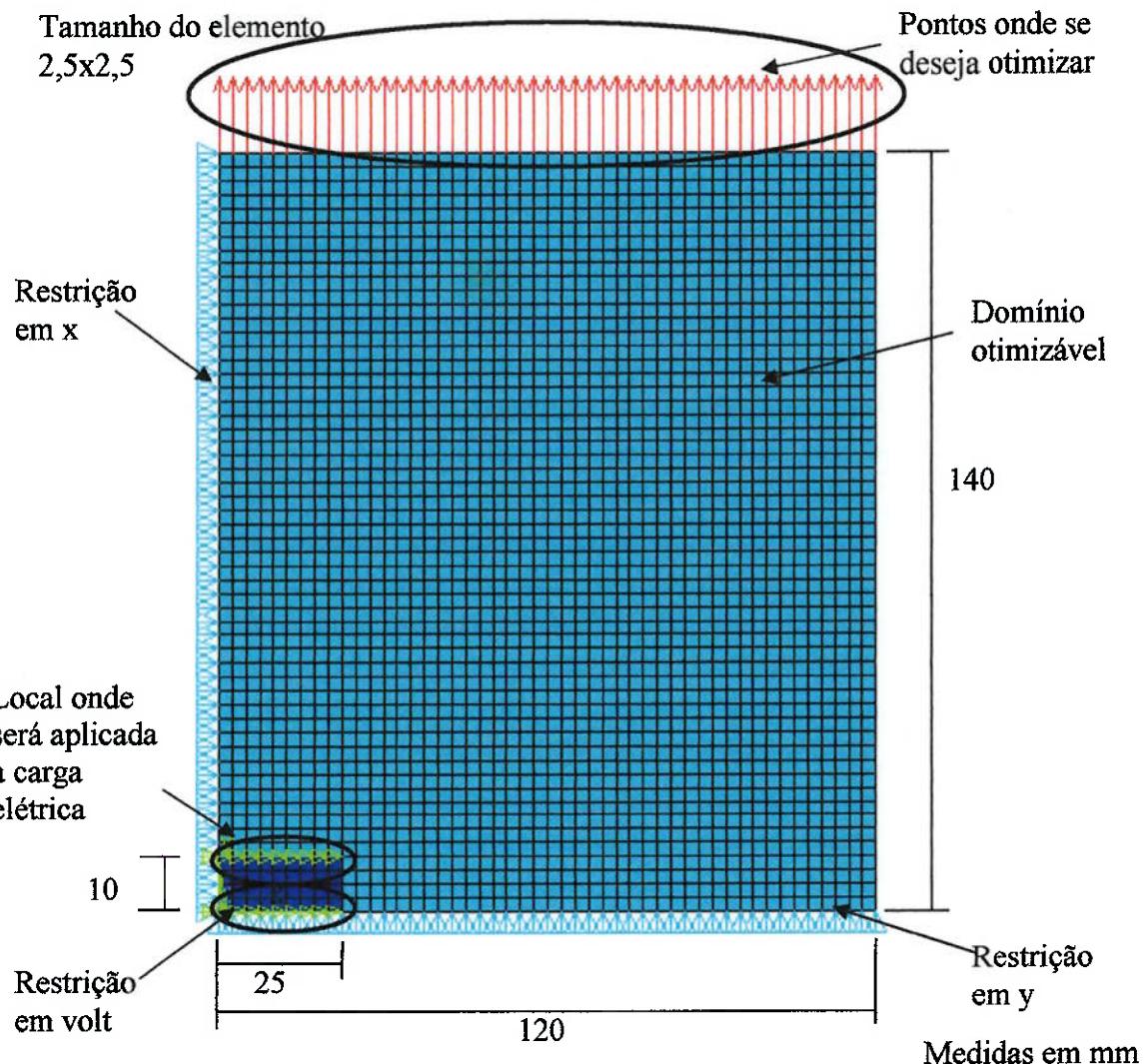


Fig. 8.3. Domínio inicial com as dimensões e condições de contorno.

- São feitas análises pelo MEF para que possam ser construídas as equações de equilíbrio;
- Calcula-se a função objetivo;
- Verifica-se se esse resultado convergiu para um valor determinado;
- Se convergiu, visualiza-se os resultados, senão calculam-se as derivadas da função objetivo;
- Com os dados necessários, aplica-se a rotina de otimização PLS;
- É feita a atualização das variáveis, seguido de uma nova análise pelo MEF, novo cálculo da função objetivo até que o valor desta função chegue ao valor esperado.

Todo este processo pode-se resumir pela Fig. 8.4.

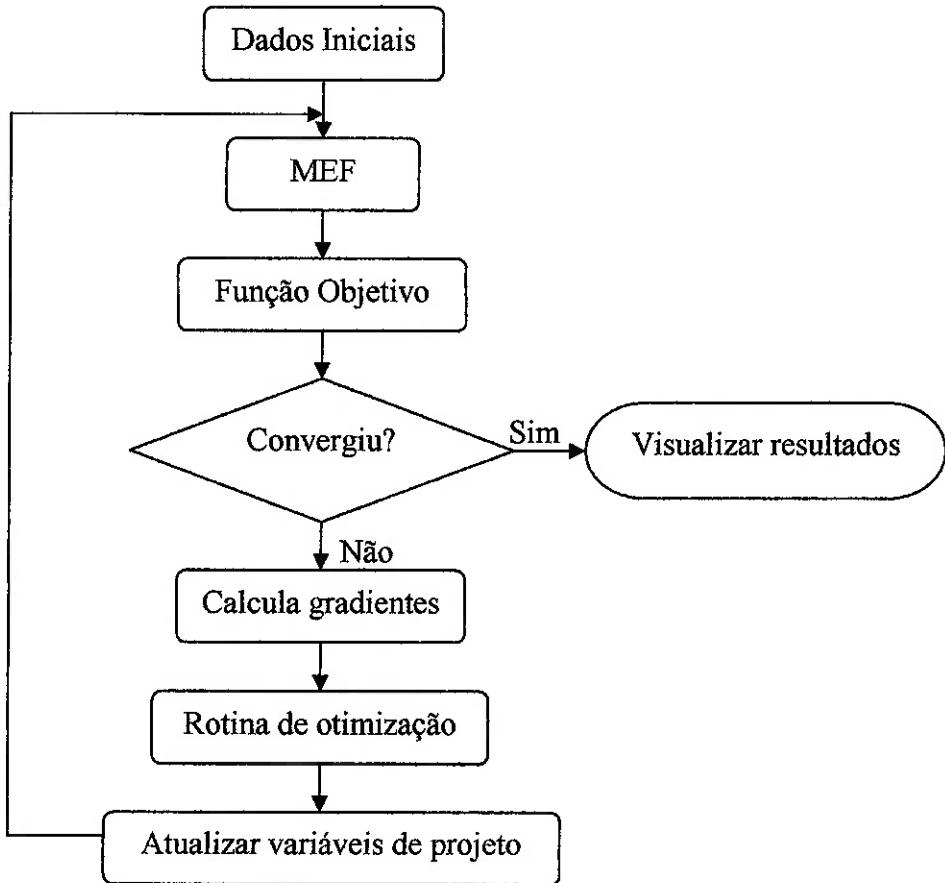


Fig. 8.4. Implementação numérica do software.

8.3. Resultados da formulação estática de OT (software acadêmico inicial)

Para mostrar que o software acadêmico não é suficiente para atender os objetivos aqui almejados, foram obtidos alguns resultados com ele, e posterior verificação no software comercial ANSYS.

Os parâmetros utilizados no software foram:

- $w = 0.7$;
- $\omega = 1000\text{Hz}$;
- restrição de volume = 30%;
- carga aplicada $Q = 10^{-3} \text{ A}$;
- chute inicial $\rho_0 = 0.15$;

Os resultados em escala de cinza e interpretado são apresentados a seguir:

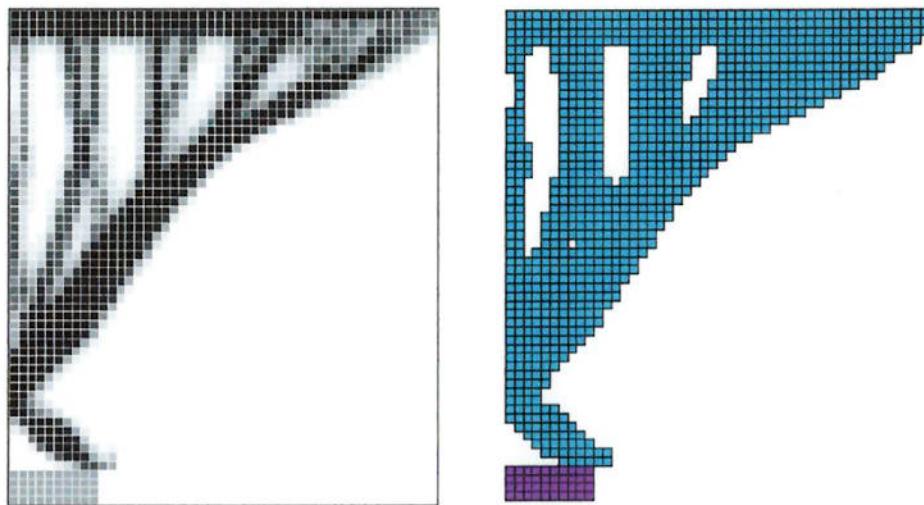


Fig. 8.5. Resultados da formulação estática do MOT.

Fazendo a verificação no ANSYS com carga $Q = 10^{-3}A$, tem-se a seguinte disposição de deslocamentos:

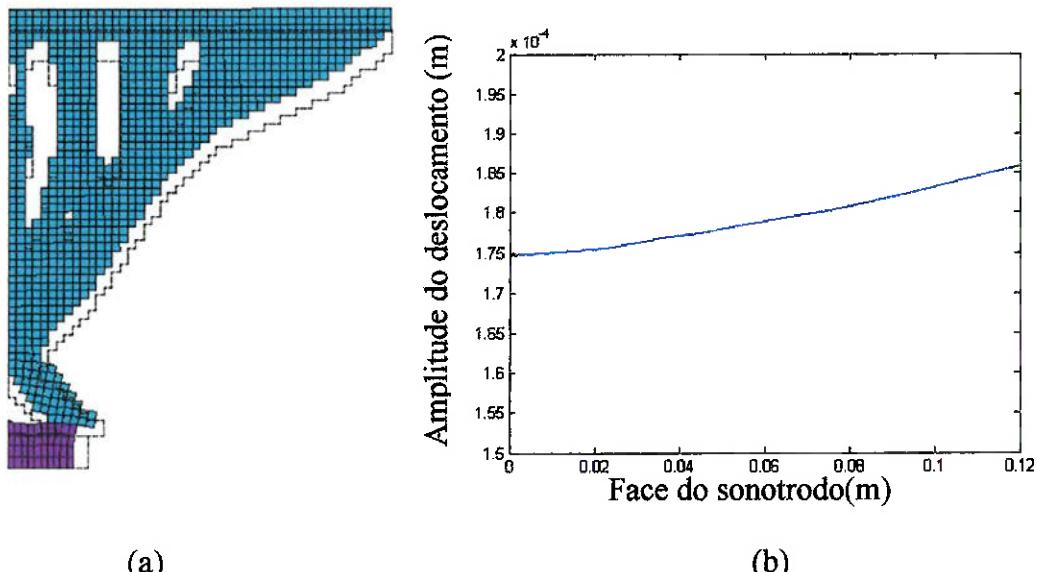


Fig. 8.6. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.

Pelo gráfico da Fig. 8.6(b) obteve-se os seguintes dados:

- Amplitude máxima: 1,8584E-04 m
- Amplitude mínima: 1,7466E-04 m
- Diferença: 6%

Portanto, o resultado não atente a restrição de deslocamentos uniformes.

8.4. Resultados da formulação dinâmica de OT (software acadêmico estendido)

Modificando a formulação de MEF para o caso dinâmico, ou seja, implantando a matriz de massa na matriz global da estrutura e modificando o modelo de material para RAMP, e utilizando os seguintes parâmetros:

- $w = 0.7$;
- $\omega = 1000\text{Hz}$;
- restrição de volume = 30%;
- carga aplicada $Q = 10^{-3} \text{ A}$;
- chute inicial $\rho_0 = 0.15$;

obteve-se os seguintes resultados.

Os resultados em escala de cinza e o interpretado são apresentados a seguir:

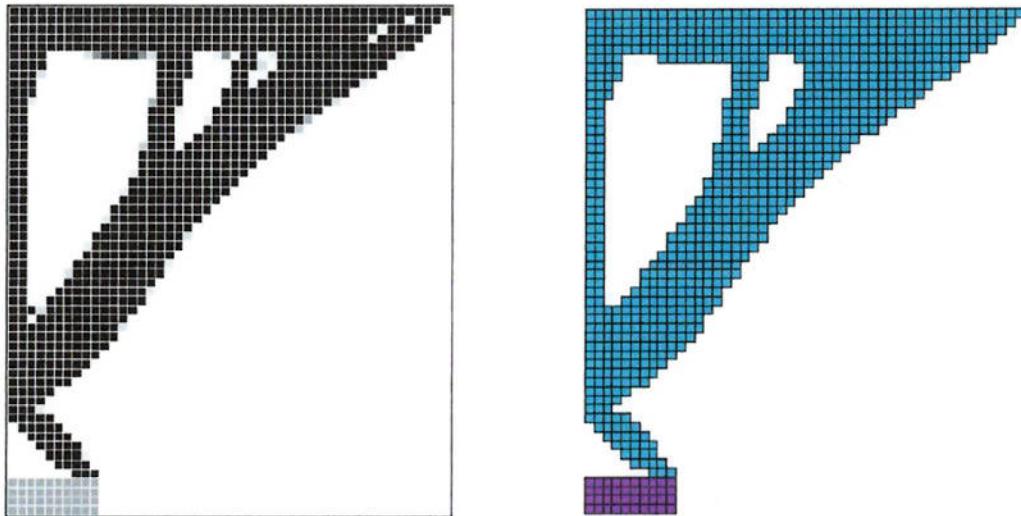


Fig. 8.7. Resultados da Formulação de MOT dinâmico.

Fazendo a verificação no ANSYS com carga $Q = 10^{-3}\text{A}$, tem-se a seguinte disposição de deslocamentos:

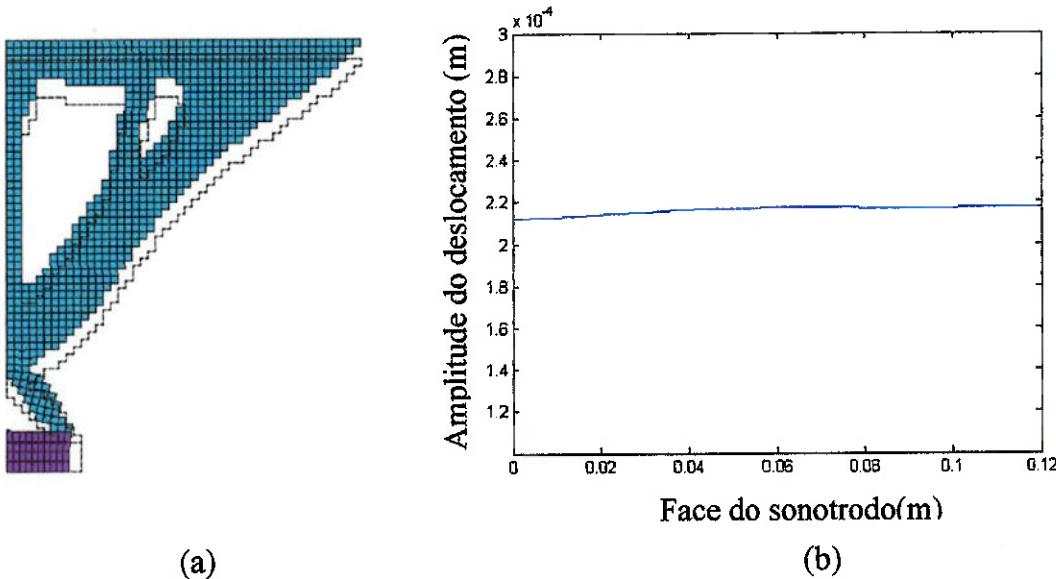


Fig. 8.8. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.

Pelo gráfico da Fig. 8.8(b) obteve-se os seguintes dados:

- Amplitude máxima: 0,21209E-03 m
- Amplitude mínima: 0,21730E-03 m
- Diferença: 2,42%

Portanto, o resultado não atente a restrição de deslocamentos uniformes.

Contudo, pode-se introduzir a idéia de restrição de domínio otimizável, ou seja, áreas onde a otimização não poderá afetar, sendo assim, mantido o material naquela determinada área. Isso é feito com o intuito de deixar propositalmente material na parte do sonotrodo que está em contato com o tecido, garantindo que o sonotrodo tenha área disposta ao contato com o tecido. A restrição de domínio é ilustrada na Fig. 8.9.

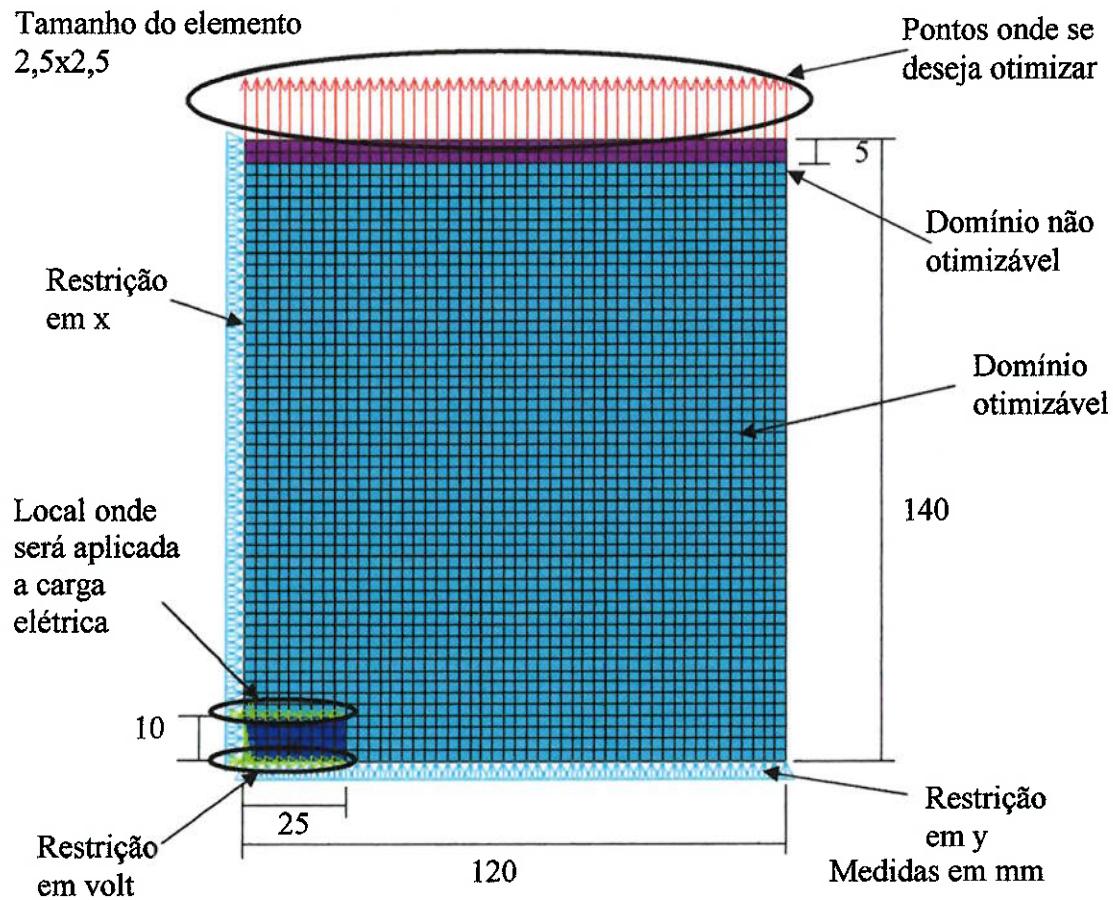


Fig. 8.9. Domínio inicial com as condições de contorno com restrição de domínio.

Os parâmetros utilizados no software foram:

- $w = 0.7$;
- $\omega = 1000\text{Hz}$;
- restrição de volume = 30%;
- carga aplicada $Q = 10^{-3} \text{ A}$;
- chute inicial $\rho_0 = 0.15$;

Os resultados em escala de cinza e o interpretado são apresentados a seguir:

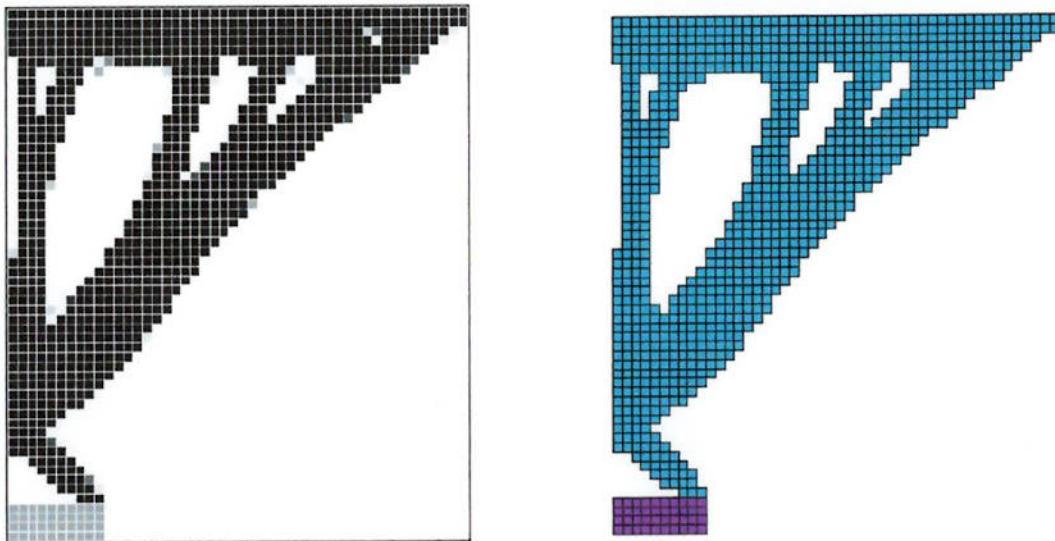


Fig. 8.10. Resultado da Formulação do MOT dinâmico, com restrição de domínio.

Fazendo a verificação no ANSYS com carga $Q = 10^{-3} \text{ A}$, tem-se a seguinte disposição de deslocamentos:

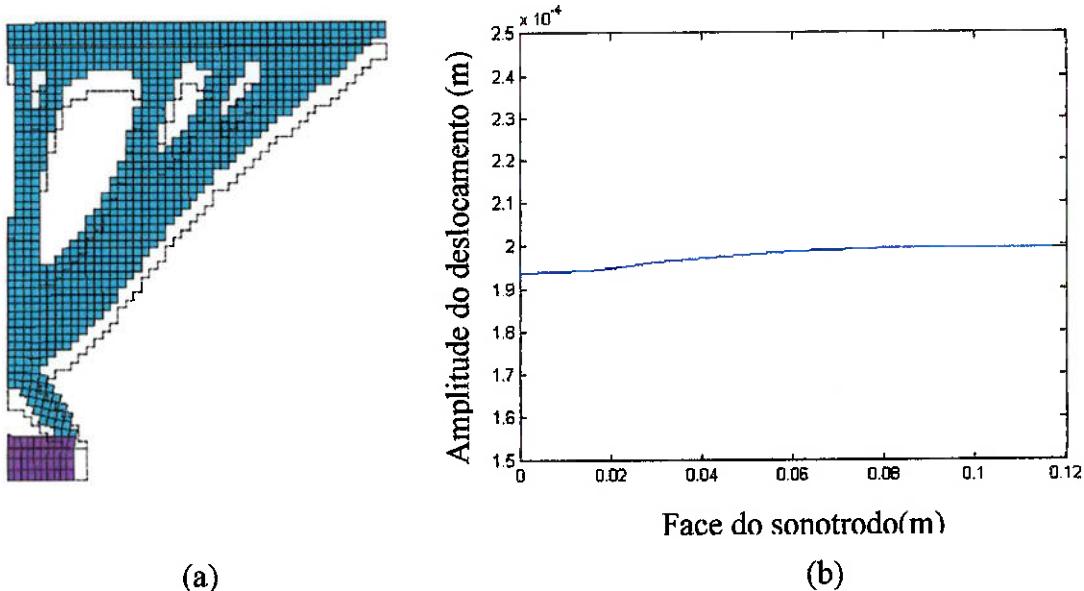


Fig. 8.11. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.

Pelo gráfico da Fig. 8.11(b) obteve-se os seguintes dados:

- Amplitude máxima: $0.19371\text{E-}03 \text{ m}$
- Amplitude mínima: $0.19956\text{E-}03 \text{ m}$
- Diferença: 2.93%

Portanto, o resultado ainda não atente a restrição de deslocamentos uniformes.

8.5. Resultados do software com a nova formulação proposta de OT

Fazendo agora a mudança na formulação da função objetivo, são necessários alguns parâmetros iniciais adicionais:

- $w = 0.5$;
- $\omega = 1000\text{Hz}$;
- restrição de volume = 30%;
- carga aplicada $Q = 10^{-3} \text{ A}$;
- chute inicial $\rho_0 = 0.15$;
- $\beta = 0.005$;
- $k = 10^{-7}$

Os resultados em escala de cinza e o interpretado são apresentados na Fig. 8.12:

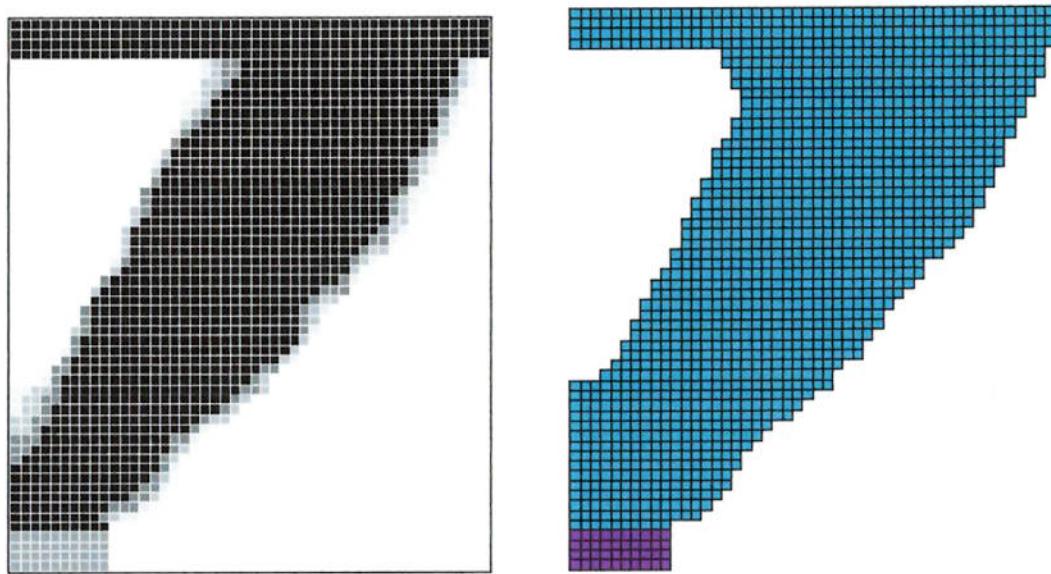


Fig. 8.12. Resultados com a nova formulação de OT.

Fazendo a verificação no ANSYS com carga $Q = 10^{-3} \text{ A}$, tem-se a seguinte disposição de deslocamentos:

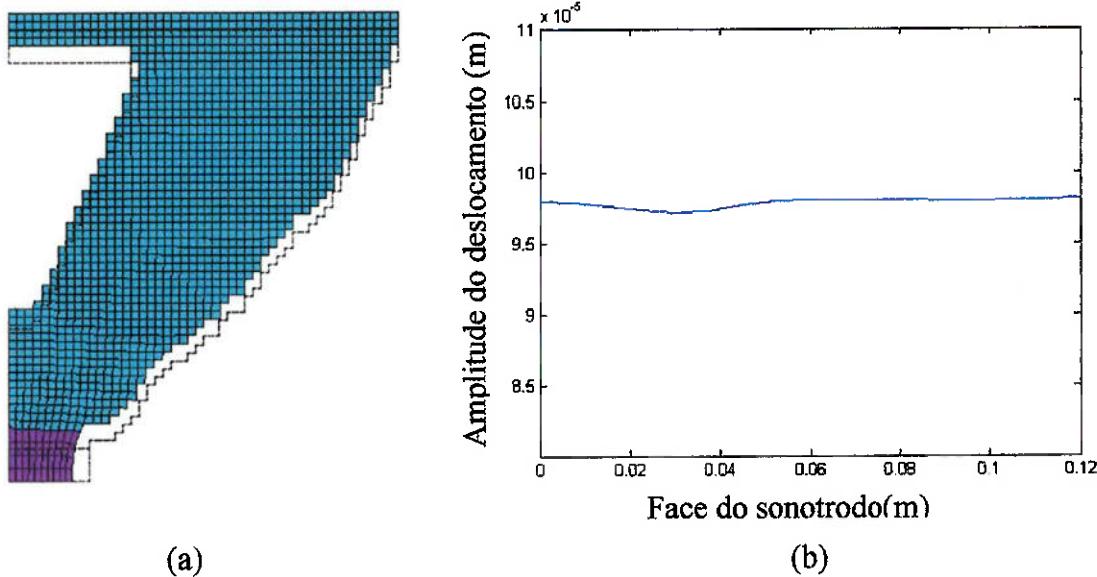


Fig. 8.13. (a) Deformação e (b) gráfico dos deslocamentos do sonotrodo ao ser submetido à carga elétrica.

Pelo gráfico da Fig. 8.11(b) obteve-se os seguintes dados:

- Amplitude máxima: $0,97135E-04$ m
- Amplitude mínima: $0,98086E-04$ m
- Diferença: 0,97%

Portanto, o resultado atende a restrição de deslocamento uniforme, porém para a malha inicial retangular indicada na Fig. 8.9.

Para verificar se este resultado atende à restrição em uma situação mais real, deve-se fazer a simulação com o conjunto amplificador-transdutor, apresentado na Fig. 8.14.

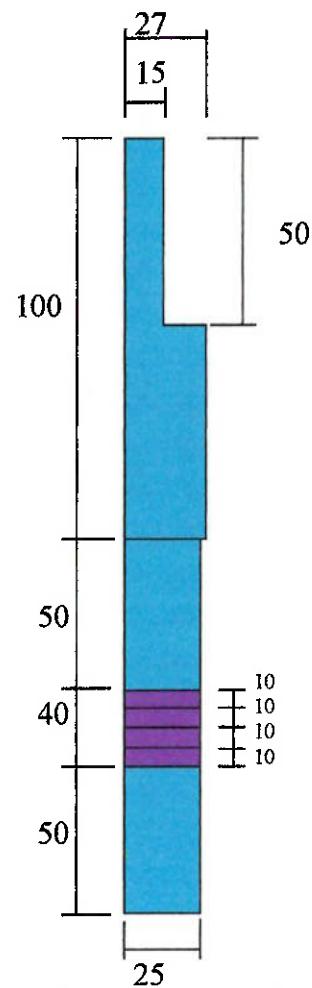


Fig. 8.14. Esquema do conjunto amplificador-sonotrodo.

A estrutura do sonotrodo junto com o conjunto amplificador-sonotrodo, seus carregamentos e restrições, estão apresentados na Fig. 8.15(a), a seguir:

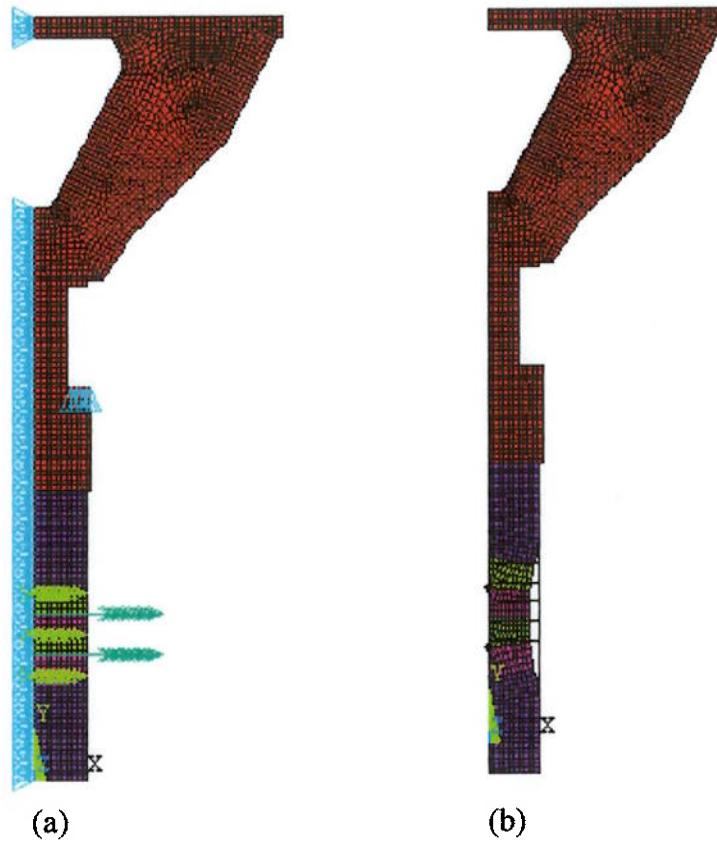


Fig. 8.15. (a) Esquema do conjunto sonotrodo-amplificador-transdutor, carregamentos e restrições; (b) deformação da estrutura.

A simulação desta estrutura pode ser visualizada na Fig. 8.15(b) e a análise quantitativa na Fig. 8.16.

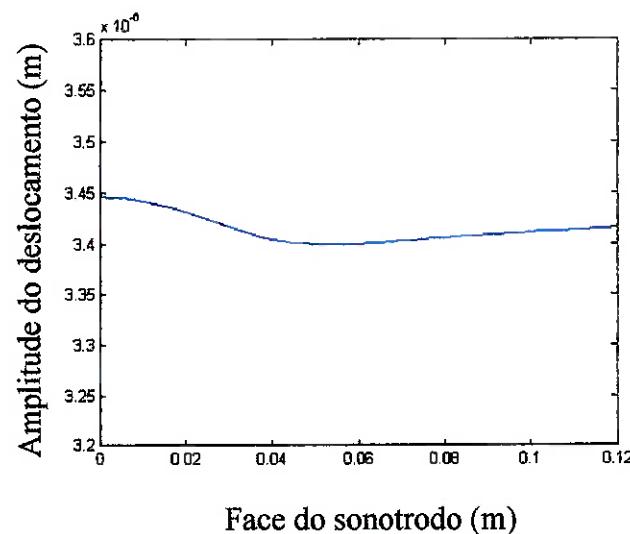


Fig. 8.16. Análise quantitativa. Gráfico detalhado dos deslocamentos do resultado do conjunto sonotrodo-amplificador-transdutor.

Pelo gráfico da Fig. 8.16 obteve-se os seguintes dados:

- Freqüência de ressonância: 1490 Hz
- Amplitude máxima: 3,4459E-6 m
- Amplitude mínima: 3,3993E-6 m
- Diferença: 1.35%

Portanto, o resultado ainda atente a restrição de deslocamento uniforme, mesmo junto com o amplificador e o transdutor, simulando uma situação mais real, a qual é realmente praticada em aplicações para cortes de tecidos.

8.6. Conclusões finais

Como pode ser visto neste trabalho, a obtenção dos deslocamentos uniformes no plano do sonotrodo em contato com o tecido não é simples. Foram necessárias muitas modificações na estrutura do software acadêmico para que ele atendesse tanto o comportamento dinâmico da estrutura, quanto a nova formulação objetivo proposta para resolver o problema. Foi também necessário fazer mudanças nos gradientes da função objetivo para que a rotina de otimização PLS gerasse resultados corretos.

Com isso, essa nova formulação se mostrou bastante eficaz na obtenção dos deslocamentos uniformes, tanto para a malha simples da Fig. 8.12, quanto do conjunto sonotrodo-amplificador-transdutor, porém, operando a baixas freqüências. Isso ocorreu pois o domínio quadrado da Fig. 8.3 possui uma baixa freqüência de ressonância, e quando material é retirado do domínio, a freqüência cai ainda mais.

Contudo, o objetivo deste trabalho era obter uma estrutura capaz de fornecer deslocamentos uniformes no plano superior a uma certa freqüência, e o que obteve-se foi uma estrutura operando a 1000 Hz e com deslocamentos uniformes, com diferença entre o máximo e mínimo deslocamentos igual a 1,35%.

ANEXOS

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARNOLD, F. J.; MUHLEN, S. S., 2001, "The Resonance Frequencies on Mechanically Pre-stressed Ultrasonic Piezotransducers", *Ultrasonics*, 39, pp.1-5.
- ARNOLD, F. J.; MUHLEN, S. S., 2001, "The Mechanical Pre-stressing in Ultrasonic Piezotransducers", *Ultrasonics*, 39, pp. 7-11.
- BATHE, K. J., "Finite Elements Procedures", Prentice Hall, New Jersey.
- BENDSØE, M. P., SIGMUND, O., 1999, "Material Interpolation Schemes in Topology Optimization", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 69, pp. 635-654.
- BENDSØE, M. P., SIGMUND, O., 2003, "Topology Optimization – Theory, Methods and Applications", Ed. Springer, New York.
- CARBONARI, R. C., 2003, "Projeto de Atuadores Piezelétricos Flextensionais Usando o Método de Otimização Topológica", Dissertação de Mestrado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da USP.
- CHEN, T., 1993, "Calculation of the Move Limits for the Sequential Linear Programming Method", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, pp. 2661-2679.
- DANTZIG, G.B., 1963, "Linear Programming and Extensions", Princeton, New Jersey.
- DESILETS, C.; WOJCIK, G.; NIKODYM, L.; MESTERTON, K., 1999, "Analyses and Measurements of Acoustically Matched, Air-Coupled Tonpilz Transducers", *IEEE Ultrasonics Symposium*, pp. 1045-1048.

- EIRAS, J. A., "Materiais Piezelétricos", Sensores: Tecnologias e Aplicações.
- HAFTKA, R.T., GÜRDAL, Z., KAMAT, M.P., 1996, "Element of Structural Optimization", Kluwer Academic Publishes, Boston, USA.
- HANSEN, L.V., 2005, "Topology optimization of free vibrations of fiber laser packages", *Struct Multidisc Optim* (2005), v. 29, pp. 341-348.
- HEIKKOLA, E.; LAITINEN, M., 2005, "Model-based Optimization of Ultrasonic Transducers", *Ultrasonics Sonochemistry*, v. 12, pp. 53-57.
- IKEDA, T., 1996, "Fundamentals of Piezoelectricity" Oxford – England: Oxford University Press.
- KIM, S. G.; CHANG, K., 2004, "Simple microwave QPSK modulator using piezoelectric transducers", *IEE Electronics Letters*, v.40, n. 23.
- LERCH, R., 1990, "Simulation of Piezoelectric Devices by Two-and-Three-Dimensional Finite Elements". *IEEE Transactions on Ultrasonics Ferroelectrics and Frequency Control*. v. 37, n.2, pp. 233-247.
- LUCAS, M.; GRAHAM, G.; SMITH, A.C., 1996, "Enhanced Vibration Control of an Ultrasonic Cutting Process", *Ultrasonics*, 34, pp. 205-211.
- MEACHAM, J.S.; EJIMOFOR, C.; KUMAR, S.; DEGERTEKIN, F. L.; FEDOROV, A. G., 2004, "Micromachined ultrasonic droplet generator based on a liquid horn structure", *Review of Scientific Instruments*, v. 75, n. 5.
- MOROZOV, A. K.; WEBB, D. C., 2003, "A Sound Projector for Acoustic Tomography and Global Ocean Monitoring", *IEEE Journal of Oceanic Engineering*, v. 28, n. 2, pp. 174-185.

NADER, G., 2002, "Desenvolvimento de Técnicas de Caracterização de Transdutores Piezelétricos", Tese de Doutorado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da USP.

NAILLON, M.; COURSANT, R. H.; BESNIER, F., 1983, "Analysis of piezoelectric structures by a finite element method", ACTA Electronics, v. 25, n. 4, pp.341-362.

OMATA, S.; MURAYAMA, Y.; CONSTANTINOU, C. E., 2004, "Real time robotic tactile sensor system for the determination of the physical properties of biomaterials", Sensors and Actuators, 112, pp. 278-285.

PRESS, W.H., TENKOLSKY, S.A., WETTERLING, W.T., FLANNERY, B.P., 1999, "Numerical Recipes in C – The art of Scientific Computing", pp.430-444, Cambridge University Press.

SILVA, E. C. N., NISHIWAKI, S., KIKUCHI, N., 1999, "Design of Piezocomposite Materials and Piezoelectric Transducers Using Topology Optimization Part II", Archives of Computational Methods in Engineering, v. 6, n. 3, pp. 191-222.

SILVA, J. B., 2005, "Transdutor Piezelétrico de Potência para Corte e Soldagem de Tecidos Sintéticos", Exame de qualificação de mestrado, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da USP.

SHERRIT, S.; BAO, X.; CHANG, Z.; DOLGIN, B. P.; BAR-COHEN, Y.; PAL, D.; KROH, J.; PETERSON, T., 2000, "Modeling of the Ultrasonic/Sonic Driller/Corer: USDC", IEEE Ultrasonics Symposium.

SHUYU, L., 1995, "Design of Piezoelectric Sandwich Ultrasonic Transducers with Large Cross-Section", Applied Acoustics, v. 44, pp. 249-257.

SHUYU, L., 1997, "Sandwiched Piezoelectric Ultrasonic Transducers of Longitudinal-Torsional Compound Vibrational Modes", IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control, v. 44, n. 6.

SHUYU, L., 2004, "Optimization of the Performance of the Sandwich Piezoelectric Ultrasonic Transducer", Journal of Acoustical Society of America, v. 115, n. 1, pp. 182-186.

SHUYU, L., 2005, "Analysis of the Sandwich Piezoelectric Ultrasonic Transducer in Coupled Vibration", Journal of Acoustical Society of America, v. 117, n. 2, pp. 653-661.

THOMAS, H.L., VANDERPLAATS, G.N., SHYY, Y.K., 1992, "A Study of Move Limit Adjustment Strategies in the Approximation Concepts Approach to Structural Synthesis", AIAA-VMA Engineering, pp.507-512.

VINHAIS, H. F., 2003, "Projeto e Simulação de Motores Piezelétricos Lineares pelo Método dos Elementos Finitos", Relatório de Iniciação Científica apresentado à FAPESP, São Paulo – Brasil, Escola Politécnica da USP.

YANG, R.S., CHUANG, C.H., 1994, "Optimal Topology Design Using Linear Programming", Computers and Structures, 52-2, pp. 265-275.

YONG, Y-K; CHO, Y. 1994, "Algorithms for Eigenvalue Problems in Piezoelectric Finite Element Analyses", IEEE Ultrasonics Symposium – 1057.

